

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (Übungsaufgabe 5.40 im Skript.). Sei $M(t)$ die Erneuerungsfunktion zur Verteilungsfunktion G .

(a) Zeigen Sie, dass

$$\sup_{u \geq 0} (M(u) - M(u - \Delta)) \leq \bar{G}(\Delta)^{-1},$$

wobei wir $M(v) = 0$ für alle $v < 0$ setzen.

(b) Nutzen Sie (a) um (5.37) zu zeigen, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(0,t]} u_{k,\Delta} \epsilon_k(t-x) dM(x) = \frac{\Delta}{m} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,\Delta}.$$

Beweis.

Zu (a): Aus der Erneuerungsgleichung für M wissen wir $M = G + G * M$ und damit

$$\begin{aligned} 1 &\geq G(u) = M(u) - \int_{(0,u]} F(u-s) dM(s) = \int_{(0,u]} \bar{G}(u-s) dM(s) \\ &\geq \int_{(0,u]} \mathbb{1}_{(u-\Delta,u]}(s) \bar{G}(u-s) dM(s) \geq \int_{(u-\Delta,u]} \bar{G}(\Delta) dM(s) \\ &= \bar{G}(\Delta) (M(u) - M(u - \Delta)). \end{aligned}$$

Zu (b): Wir erinnern uns, dass $u_{k,\Delta}$ die Summanden der Obersumme sind und dass $\epsilon_k(t) = \mathbb{1}_{[k\Delta, (k+1)\Delta)}(t)$. Für das Integral auf der linken Seite finden wir also

$$\int_{(0,t]} u_{k,\Delta} \epsilon_k(t-x) dM(x) = u_{k,\Delta} (M(t - k\Delta) - M(t - (k+1)\Delta)).$$

Nach (a) ist die rechte Seite von $\bar{G}(\Delta)u_{k,\Delta}$ beschränkt, was summierbar ist. Mit dem Blackwell'schen Erneuerungssatz folgt außerdem Rechte Seite $\rightarrow (u_{k,\Delta}\Delta)/m$. Mit dominierender Konvergenz folgt also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(0,t]} u_{k,\Delta} \epsilon_k(t-x) dM(x) = \frac{\Delta}{m} \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,\Delta},$$

wie gewünscht. □

Aufgabe 12.2. Es sei $L_t = A_t + R_t = T_{N_t+1} - T_{N_t}$ die Gesamtlebensdauer eines Erneuerungsprozesses mit nicht-arithmetischen Wartezeiten und $\mathbb{E}W_1 = m < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(L_t \leq z) = \frac{1}{m} \int_{(0,z]} y dG(y).$$

Beweis. Wir nutzen wieder ein Erneuerungsargument. Offenbar gilt

$$\mathbb{P}(L_t \leq z \mid T_1 = x) = \begin{cases} 0, & x > t \text{ und } x > z, \\ 1, & x > t \text{ und } x \leq z, \\ \mathbb{P}(L_{t-x} \leq z), & t > x. \end{cases}$$

Damit, für $L_t(z) := \mathbb{P}(L_t \leq z)$,

$$L_t(z) = \int_{(t,\infty)} \mathbb{1}_{(0,z]}(x) dG(x) + \int_{(0,t]} L_t(t-x) dG(x)$$

Mit $a(t) = \int_{(t,\infty)} \mathbb{1}_{(0,z]}(x) dG(x)$ folgt also

$$L_t(z) = a(t) + \int_{(0,t]} \int_{(t-x,\infty)} \mathbb{1}_{(0,z]}(y) dG(y) dM(x).$$

Da wir an dem Grenzwert $t \rightarrow \infty$ interessiert sind, betrachten wir nur $t > z$. Dies impliziert zum einen $a(t) = 0$ und zum anderen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} L_t(z) &= \int_{(0,t)} \left(\int_{(t-y,t]} dM(x) \right) \mathbb{1}_{(0,z]}(y) dG(y) \\ &= \int_{(0,z]} (M(t) - M(t-y)) dG(y). \end{aligned}$$

Aus dem Erneuerungssatz von Blackwell folgt $M(t) - M(t-y) \rightarrow y/m$, und da nach Aufgabe 12.1 $M(t) - M(t-y) \leq \bar{G}(y)^{-1}$ und wir nur über ein beschränktes Intervall integrieren, folgt die Behauptung mit dem Satz von der dominierenden Konvergenz. \square

Aufgabe 12.3. Die *Größenverzerrung* (size bias) X^* einer nichtnegativen Zufallsvariable X mit $0 < \mathbb{E}[X] = m < \infty$ ist durch die folgenden Eigenschaft definiert: Es gilt

$$\mathbb{E}[f(X^*)] = \frac{1}{m} \mathbb{E}[X f(X)]$$

alle messbaren Funktionen $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $\mathbb{E}[X f(X)] < \infty$.

Bemerkung: Die Größenverzerrung haben wir bereits im Kontext vom *Wartezeiten-Paradoxon* kennen gelernt. Eine besondere Rolle spielen die Größenverzerrungen z.B. auch bei Freundschaften in (sozialen) Netzwerken: Ist die Anzahl an Freunden eines uniform gewählten Knotens X , dann hat ein durchschnittlicher Freund dieses Knotens X^* -verteilt viele Freunde - das ist das sog. **friendship paradox**.

- (a) Es gelte $\text{Var } X = \sigma^2 < \infty$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X^*$ und vergleichen Sie diesen mit dem Erwartungswert der (asymptotischen) Restlebensdauer in (5.38). Erläutern Sie potentielle Unterschiede, auch im Kontext zu Aufgabe 12.2.
- (b) Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass $X^* \sim X + 1$.
- (c) Sei $X \sim \text{Exponential}(\lambda)$. Bestimmen Sie die Verteilung von X^* .

- (d) Sei $X \sim \text{Pareto}(1, \alpha)$. Für welche $\alpha > 0$ ist X^* definiert? Bestimmen Sie die Verteilung von X^* in diesem Fall.
- (e) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Kontext des Wartezeiten- oder des Friendship-Paradoxons.

Beweis.

Zu (a): Schreiben wir G für die Verteilungsfunktion von X , dann hat die Größenverzerrung X^* nach der definierenden Eigenschaft die Verteilungsfunktion

$$G^*(z) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(0,z]}(X^*)] = \frac{1}{m} \int_{(0,z]} y dG(y),$$

die Größenverzerrung hat also die in Aufgabe 12.2 gefundene Grenzverteilung, oder besser, die Grenzverteilung der Gesamtlebensdauer entspricht der größenverzerrten Wartezeit. Für den Erwartungswert von X^* finden wir direkt

$$\mathbb{E}X^* = \frac{\mathbb{E}X^2}{m} = \frac{\sigma^2 + m^2}{m}.$$

Dies entspricht dem doppelten Erwartungswert der Restlebensdauer. Kommen wir ohne Information an einem beliebigen Zeitpunkt an der Bushaltestelle an, dann haben wir tendenziell ein langes Intervall erwischt. Daher entspricht die Gesamtlänge der größenverzerrten Wartezeit. Da wir aber zu einem zufälligen Zeitpunkt innerhalb dieses ankommen, ist in Erwartung die Hälfte des Intervalls schon vorbei. Auch dies lässt sich daran sehen, dass die schon vergangene Zeit A_t dieselbe Verteilung (im Grenzwert) und damit Erwartung wie R_t hat.

Zu (b): Wir haben mit $\lambda = m$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + 1 = k) &= \mathbb{P}(X = k - 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{k}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X=k\}}] = \mathbb{P}(X^* = k). \end{aligned}$$

Dies zeigt auch wieder die ‘Unabhängigkeit’ der Poissonverteilung. Im Kontext des Friendship-Paradoxons mit poissonverteilter Freundesanzahl erhöht die Information der Freund eines Freundes zu sein, die Anzahl an Freunden nur um eins (den schon bekannten Freund) nach oben. Ansonsten gibt es keine weitere Verzerrung.

Zu (c): Ist X exponentialverteilt, dann hat G die Dichte $\lambda e^{-\lambda x}$, also, wegen $m = 1/\lambda$,

$$G^*(z) = \int_{(0,z]} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx.$$

Also hat X^* die Dichte einer $\Gamma(2, \lambda)$ -Verteilung. Aufgrund der Faltungseigenschaft, hat also X^* dieselbe Verteilung wie die Summe zweier unabhängiger Exponentialverteilungen. Dies ist ein Resultat der Gedächtnislosigkeit. Im Sinne des Wartezeiten-Paradoxons zerfällt die Wartezeit in zwei unabhängige Exponentialverteilungen. Die erste beschreibt die Zeit, die vergangen ist, bis zu unserer Ankunftszeit. Die andere wird unabhängig davon bei unserer Ankunft ‘ausgewürfelt’ (bzw. realisiert) und gibt

die restliche Wartezeit an. Im übrigen folgt die Unabhängigkeit von A_t und R_t für den Poisson-Prozess.

Zu (c): Im Paretofall hat X die Dichte $\alpha x^{-\alpha-1}$, $x > 1$. Der Erwartungswert m existiert, falls $\alpha > 1$ mit

$$m = \alpha \int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Die Größenverzerrung hat also die Verteilungsfunktion

$$G^*(z) = (\alpha - 1) \int_1^{\infty} x^{-(\alpha-1)} dx$$

und ist damit wieder paretoverteilt mit Parameter $\alpha - 1$. Der Typ der Verteilung bleibt zwar gleich, aber die Größenordnung verändert sich um eine ganze Ordnung, in dem Sinne, dass ein ganzes Moment verloren geht (z.B. falls $\alpha \in (1, 2)$, dann ist $m < \infty$ aber $m^* = \infty$). Die Größenverzerrten Wartezeiten sind also deutlich größer. Dies ist ein Effekt, der schweren Tails von X . \square

Aufgabe 12.4 (Übungsaufgabe 5.61). Zeigen Sie Bemerkung 5.59 (ii). Das bedeutet, falls es $r > r_0$ gibt, mit $f(r) < \infty$, dann ist $L < \infty$ und es gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{r_0 u} \psi(u) = \frac{\rho \mu}{\psi'_{X_1}(r_0) - c/\lambda}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $L < \infty$. Nach Voraussetzung gilt für ein $r > r_0$, dass

$$\infty > f(r) = \frac{\lambda}{cr + \lambda} (1 + r \int_0^\infty e^{rx} \bar{F}(x) dx) \Rightarrow \int_0^\infty e^{rx} \bar{F}(x) dx < \infty.$$

Nach Definition

$$L = \int_0^\infty v e^{r_0 v} \bar{F}(v) dv = \int_0^\infty e^{(r_0 + \log(v)/v)v} \bar{F}(v) dv.$$

Da $r > r_0$ gibt es ein M , so das $r > r_0 + \log(v)/v$ für alle $v > M$, also

$$L \leq M e^{r_0 M} + \int_M^\infty e^{rv} \bar{F}(v) dv < \infty.$$

Um den Beweis abzuschließen, bleibt es dank Satz 5.58 zu zeigen, dass $\psi'_{X_1}(r_0) - c/\lambda = r_0 L$. Dazu

$$\begin{aligned} \psi'_{X_1}(r_0) &= \mathbb{E}[X_1 e^{r_0 X_1}] = \int_0^\infty x e^{r_0 x} dF(x) = - \int_0^\infty x e^{r_0 x} d\bar{F}(x) \\ &= - \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} (m e^{r_0 m} \bar{F}(m))}_{=0, \text{ da } L < \infty} + 0 + \int_0^\infty \bar{F}(x) d(x e^{r_0 x}) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}(x) (e^{r_0 x} + r_0 x e^{r_0 x}) dx = r_0 L + \int_0^\infty e^{r_0 x} \bar{F}(x) dx. \\ &= r_0 L + c\lambda, \end{aligned}$$

wobei wir $\int_0^\infty e^{r_0 x} \bar{F}(x) dx = c/\lambda$ im Beweis von Satz 5.58 in der Vorlesung hergeleitet haben (siehe über (5.51)). Damit folgt die Behauptung. \square

Aufgabe 12.5. Betrachten Sie das Cramér-Lundberg-Modell mit $\Gamma(2, \gamma)$ -verteilten Schadenhöhen. D.h., dass X_1 die Dichte

$$f(x) = \gamma^2 x e^{-\gamma x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x).$$

hat. Es sei $\lambda > 0$ die Intensität des Poisson-Prozesses N_t .

1. Bestimmen Sie den Lundbergkoeffizienten r_0 .
2. Bestimmen Sie $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{r_0 u} \psi(u)$.

Beweis. Zunächst gilt, dass $X \sim \Gamma(2, \gamma) = \exp(\gamma) * \exp(\gamma)$, also

$$\psi_X(r) = \psi_{\exp}(r) \psi_{\exp}(r) = \left(\frac{\gamma}{\gamma - r} \right)^2, \quad r < \gamma.$$

Da N_t ein Poisson-Prozess mit Intensität λ ist, sind die Wartezeiten $\exp(\lambda)$ -verteilt, also $\psi_W(r) = \lambda/(\lambda - r)$, $r < \lambda$. Wir können annehmen, dass die NPC erfüllt ist, d.h. $2/\gamma - c/\lambda < 0 \Leftrightarrow \gamma/2 > \lambda/c$. Damit folgt, dass $r_0 < \gamma$ die eindeutige positive Lösung ist von

$$1 = \mathbb{E}e^{rX_1 - rcW_1} = \frac{\gamma^2}{(\gamma - r)^2} \frac{\lambda}{\lambda + cr}$$

$$\Leftrightarrow 0 = r((c\gamma^2 - 2\gamma\lambda) + (\lambda - 2\gamma c)r + cr^2).$$

Die quadratische Gleichung in der Klammer hat die Lösung

$$r^2 - (2\gamma - \lambda/c)r + \gamma(\gamma - 2\lambda/c) = 0$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \underbrace{\gamma - \frac{\lambda}{2c}}_{>0} \pm \sqrt{\frac{(2\gamma - \lambda/c)^2}{4} - \gamma(\gamma - 2\lambda/c)} = \gamma - \frac{\lambda}{2c} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 + 4\gamma\lambda c}{4c^2}}.$$

Weiter gilt $\lambda^2 + 4\gamma\lambda c > \lambda^2$ und damit (wegen $\lambda, c > 0$)

$$r_2 = \gamma - \frac{\lambda}{2c} + \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma\lambda c}}{2c} > \gamma$$

und damit $f(r_2) = \infty$. Als Lösung kommt also nur r_1 in Frage, und wir müssen prüfen, ob $r_1 > 0$. Dazu

$$r_1 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\gamma - \frac{\lambda}{c}\right)}_{>0} + \left(\frac{3\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma\lambda c}}{c}\right) > 0. \quad (1)$$

Außerdem gilt wegen der NPC, dass $\lambda^2 + 4\gamma\lambda c < (c^2\gamma^2/4) + 2\gamma^2c^2 = (9/4)c^2\gamma^2$, und damit

$$\frac{3\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\gamma\lambda c}}{c} > 0,$$

also (1). Es folgt, $r_0 = \gamma - \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\gamma\lambda c}}{2c}$. Für den zweiten Teil nutzen wir Aufgabe 12.4. Mit $\rho = (c/\lambda\mu) - 1 = (\gamma c - 2\lambda)/2\lambda$, folgt $\rho\mu = (\gamma c - 2\lambda)/(\gamma\lambda)$. Außerdem gilt

$$\psi'_X(r) = 2\psi_{\exp}(r) \frac{\gamma}{(\gamma - r)^2},$$

also

$$\psi'_X(r_0) = \frac{16\gamma^2 c^3}{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\gamma\lambda c})^3} =: \alpha$$

und damit

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{r_0 u} \psi(u) = \frac{\gamma c - 2\lambda}{\gamma\lambda\alpha - c\gamma}.$$

□