Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (Übungsaufgabe 5.40 im Skript.)**.** Sei $M(t)$ die Erneuerungsfunktion zur Verteilungsfunktion G.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\sup_{u\geq 0}\Big(M(u)-M(u-\Delta)\Big)\leq \bar{G}(\Delta)^{-1},$$

wobei wir $M(v)=0$ für alle $v<0$ setzen.

(b) Nutzen Sie (a) um (5.37) zu zeigen, also

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(0,t]}u_{k,\Delta}\epsilon_k(t-x)\,dM(x)=\frac{\Delta}{m}\sum_{k=0}^{\infty}u_{k,\Delta}.$$

Aufgabe 12.2. Es sei $L_t=A_t+R_t=T_{N_t+1}-T_{N_t}$ die Gesamtlebensdauer eines Erneuerungsprozesses mit nicht-arithmetischen Wartezeiten und $\mathbb{E}W_1=m<\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(L_t\leq z)=\tfrac{1}{m}\int_{(0,z]}y\,dG(y).$$

Aufgabe 12.3. Die *Größenverzerrung* (size bias) X^* einer nichtnegativen Zufallsvariable X mit $0<\mathbb{E}[X]=m<\infty$ ist durch die folgenden Eigenschaft definiert: Es gilt

$$\mathbb{E}[f(X^*)]=\tfrac{1}{m}\mathbb{E}[Xf(X)]$$

alle messbaren Funktionen $f\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ mit $\mathbb{E}[Xf(X)]<\infty$.
Bemerkung: Die Größenverzerrung haben wir bereits im Kontext vom *Wartezeiten-Paradoxon* kennen gelernt. Eine besondere Rolle spielen die Größenverzerrungen z.B. auch bei Freundschaften in (sozialen) Netzwerken: Ist die Anzahl an Freunden eines uniform gewählten Knotens X, dann hat ein durchschnittlicher Freund dieses Knotens X^*-verteilt viele Freunde - das ist das sog. friendship paradox.

(a) Es gelte $\operatorname{Var}X=\sigma^2<\infty$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X^*$ und vergleichen Sie diesen mit dem Erwartungswert der (asymptotischen) Restlebensdauer in (5.38). Erläutern Sie potentielle Unterschiede, auch im Kontext zu Aufgabe 12.2.

(b) Sei $X\sim\text{Poisson}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass $X^*\sim X+1$.

(c) Sei $X\sim\text{Exponential}(\lambda)$. Bestimmen Sie die Verteilung von X^*.

(d) Sei $X\sim\text{Pareto}(1,\alpha)$. Für welche $\alpha>0$ ist X^* definiert? Bestimmen Sie die Verteilung von X^* in diesem Fall.

(e) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Kontext des Wartezeiten- oder des Friendship-Paradoxons.

Aufgabe 12.4 (Übungsaufgabe 5.61)**.** Zeigen Sie Bemerkung 5.59 (ii). Das bedeutet, falls es $r > r_0$ gibt, mit $f(r) < \infty$, dann ist $L < \infty$ und es gilt

$$\lim_{u\to\infty} e^{r_0 u}\psi(u) = \frac{\rho\mu}{\psi'_{X_1}(r_0) - c/\lambda}.$$

Aufgabe 12.5. Betrachten Sie das Cramér-Lundberg-Modell mit $\Gamma(2,\gamma)$-verteilten Schadenhöhen. Es sei $\lambda > 0$ die Intensität des Poisson-Prozesses N_t.

1. Bestimmen Sie den Lundbergkoeffizienten r_0.
2. Bestimmen Sie $\lim_{u\to\infty} e^{r_0 u}\psi(u)$.