Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1. Zeigen Sie, dass für jeden Erneuerungsprozess N_t gilt, dass

$$\mathbb{E}[N_t^2] = M(t) + 2\int_{(0,t]} M(t-s)\,dM(s).$$

Hinweis: Nutzen Sie ein Erneuerungsargument.

Beweis. Wir definieren $g(t) := \mathbb{E}N_t^2$. Unser Ziel ist es also $g = M + 2M * M$ zu beweisen. Analog zu Bemerkung 5.22 erhalten wir, dass

$$\mathbb{E}[N_t^2 \mid T_1] = 0^2 \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} + \mathbb{E}[(1 + N_{t-T_1})^2]\mathbb{1}_{\{T_1 \le t\}}.$$

Damit und mit $M(t) = \mathbb{E}N_t$ folgt

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{(0,t]} \mathbb{E}[(1 + N_{t-x})^2]\,dG(x) \\ &= G(t) + 2\int_{(0,t]} M(t-x)\,dG(x) + \int_{(0,t]} g(t-x)\,dG(x). \end{aligned}$$

Setzen wir $a = G + 2M * G$, dann löst g die Erneuerungsgleichung $g = a + g * G$ und damit hat g nach dem Erneuerungssatz die Form $g = a + a * M$. Nutzen wir noch $M = G + M * G$ nach Proposition 5.21, erhalten wir

$$\begin{aligned} g &= G + 2M * G + (G + 2M * G) * M = M + M * G + (M + M * G) * M \\ &= M + M * G + M * M + (M - G) * M = M + 2M * M, \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Aufgabe 11.2. Sei G eine Verteilungsfunktion mit $G(0) = 0$ und Erwartungswert $\int x\,dG(x) = m < \infty$, und wir schreiben $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$.

(a) Existiere nun auch die Varianz $\sigma^2 = \int (x-m)^2\,dG(x) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{t\to\infty} t^2\bar{G}(t) = 0$ gilt.

(b) Sei

$$H(t) = \frac{1}{m}\int_0^t \bar{G}(y)\,dy,$$

die Funktion aus Definition 5.31. Zeigen Sie, dass H eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie den zugehörigen Erwartungswert.

Beweis.
Zu (a): Sei Y verteilt nach G. Da Y endliche Varianz σ^2 hat, gilt $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Nehmen wir nun an, dass $t^2\bar{G}(t) \to C > 0$. Dann gibt es $T > 0$, so dass $\bar{G}(t) > Ct^{-2}/2$ für alle $t > T$. Dies bedeutet aber

$$\infty > \mathbb{E}Y^2 = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > \sqrt{y})dy = 2\int_0^\infty x\mathbb{P}(Y > x)dx > C\int_0^\infty x \cdot x^{-2}dx = \infty,$$

was ein Widerspruch ist. Damit folgt die Behauptung.
Zu (b): Offenbar gilt $H(0) = 0$ und

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = m^{-1} \underbrace{\int_0^\infty \bar{G}(y)dy}_{=m} = 1.$$

Für die Monotonie sei $t_1 < t_2$. Damit

$$H(t_2) - H(t_1) = m^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \bar{G}(y)dy > 0,$$

also $H(t_1) < H(t_2)$. Die Rechtsstetigkeit von H folgt aus der Rechtsstetigkeit von $\bar{G}$ und der Stetigkeit des Integraloperators. Um den Erwartungswert zu berechnen, bemerken wir zuerst, dass H die Dichte $h(t) = m^{-1}\bar{G}(t)$ hat. Damit gilt für den zugehörigen Erwartungswert mittels partieller Integration,

$$\int_0^\infty t\,dH(t) = \int_0^\infty t\cdot h(t)\,dt = m^{-1}\int_0^\infty t\cdot\bar{G}(t)\,dt = m^{-1}\Big(\underbrace{[\tfrac{t^2}{2}\bar{G}(t)]_0^\infty}_{=0 \text{ nach } (a)} + \underbrace{\int_{(0,\infty)} \tfrac{y^2}{2} dG(y)}_{=\mathbb{E}W_1^2/2}\Big)$$
$$= \frac{\sigma^2 + m^2}{2m}.$$

Hierbei haben wir für die Partielle Integration genutzt, dass $df(x) = xdf$ genau für $f(x) = x^2/2$ gilt und dass $d\bar{G}(x) = -dG(x)$. □

Aufgabe 11.3. Sei $\bar{N} = N^H$ ein stationärer Erneuerungsprozess. Wir nehmen an, dass $\bar{N}$ unabhängige Zuwächse hat. Zeigen Sie, dass in dem Fall $\bar{N}$ ein Poisson-Prozess ist, indem Sie

(a) die Zufallsvariablen

$$Z_k^n := \left(\bar{N}_{\frac{kt}{n}} - \bar{N}_{\frac{(k-1)t}{n}}\right) \wedge 1, \qquad \text{für } n\in\mathbb{N}, k = 1,\dots,n, \text{ sowie } t > 0$$

betrachten und zeigen, dass diese eine Folge unabhängiger Bernoulli(p_n) Zufallsvariablen mit Parameter $p_n := \mathbb{P}(\bar{N}_{t/n} \geq 1)$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass $np_n \to \lambda t$ für $n \to \infty$ und folgern Sie die Behauptung mit der Poissonapproximation der Binomialverteilung.

Beweis.
Zu (a): Wir bemerken zuerst, dass $Z_k^n = 1$ genau dann, wenn mindestens ein Sprung im Interval $(\frac{(k-1)t}{n}, \frac{t}{n}]$ stattfindet. Ansonsten ist $Z_k^n = 0$. Also ist Z_k^n bernoulliverteilt mit Parameter

$$\mathbb{P}\Big(\bar{N}_{\frac{kt}{n}} - \bar{N}_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 1\Big) = \mathbb{P}\Big(\bar{N}_{\frac{t}{n}} \geq 1\Big) = p_n,$$

wobei die erste Gleichheit aus den stationären Zuwächsen folgt. Da die Zuwächse

$$\bar{N}_{\frac{t}{n}}, \bar{N}_{\frac{2t}{n}} - \bar{N}_{\frac{t}{n}}, \dots, \bar{N}_t - \bar{N}_{\frac{(n-1)t}{n}}$$

nach Voraussetzung auch noch unabhängig sind, bilden die Z_k^ndemnach eine Folge von unabhängigen Bernoulli(p_n)-Zufallsvariablen.
Zu(b): Da die Wartezeit zwischen zwei Sprüngen echt positiv ist, kann an jedem festen Zeitpunkt t maximal ein Sprung stattfinden. Setzen wir $\bar{N}_t^n = \sum_{k=1}^n Z_k^n$, dann folgt also $\bar{N}_t^n \uparrow \bar{N}_t$ fast sicher für $n \to \infty$. Es folgt mit monotoner Konvergenz

$$np_n = \sum_{k=1}^n p_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[Z_k^n] = \mathbb{E}[\bar{N}_t^n] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[\bar{N}_t] = M^H(t) = \lambda t,$$

wobei letzteres wieder aus der Stationarität folgt. Aus der Poissonapproximation der Binomialverteilung folgt also $\bar{N}_t^n \to \text{Poisson}(\lambda t)$ in Verteilung, womit direkt $\bar{N}_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ folgt. Dies zeigt Eigenschaft (iii) aus Proposition 5.5 und da die anderen Eigenschaften direkt aus den Voraussetzungen folgen, zeigt dies die Behauptung. □

Aufgabe 11.4.

(a) Geben Sie einen direkten Beweis von

$$\mathbb{P}(R_t \leq y) = G(t+y) - \int_{(0,t]} \bar{G}(t+y-x)dM(x) \tag{5.32}$$

im Stile des Beweises von Proposition 5.33.

(b) Geben Sie einen alternativen Beweis von

$$\mathbb{E}R_t = m(1+M(t)) - t \tag{5.33}$$

mit Hilfe eines Erneuerungsarguments ohne Verwendung der Wald'schen Identität.

Beweis.
Zu (a): Wie im Beweis von Proposition 5.33 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_t > y) &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(R_t > y, N_t = k) \\
&= \mathbb{P}(W_1 > t+y) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T_k \leq t, W_{k+1} > t+y-T_k) \\
&= \bar{G}(t+y) + \sum_{k\geq 1} \int_{(0,t]} \bar{G}(t+y-x)dG_{T_k}(x) \\
&= \bar{G}(t+y) + \int_{(0,t]} \bar{G}(t+y-x)\, \underbrace{d\Big(\sum_{k\geq 1} G_{T_k}(x)\Big)}_{=dM(x)},
\end{aligned}$$

womit (a) wegen

$$\mathbb{P}(R_t \leq y) = 1 - \mathbb{P}(R_t \leq y) = G(t+y) - \int_{(0,t]} \bar{G}(t+y-x)dM(x)$$

folgt.
Zu (b): Wir setzen $g(t) = \mathbb{E}R_t$ und erhalten aus dem Standard-Erneuerungsargument

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[R_t \mid T_1]] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T_1 > t\}}(T_1 - t) + \mathbb{1}_{\{T_1 \le t\}}\mathbb{E}[R_{t-T_1}]\Big] \\ &= \int_{(0,t)} (x-t)dG(x) + \int_{(0,t]} g(t-x)dG(x) \\ &= m - t - \int_{(0,t]} (x-t)dG(x) + \int_{(0,t]} g(t-x)dG(x) \\ &= m - h(t) + (h * G)(t) + (g * G)(t), \end{aligned}$$

wobei $h(x) = x$. Die Funktion $g(t)$ erfüllt also Erneuerungsgleichung $g(t) = a(t) + (g * G)(t)$ mit $a(t) = m - h(t) + (h * G)(t)$. Es folgt

$$\begin{aligned} g(t) &= a(t) + (a * M)(t) \\ &= m - h(t) + (h * G)(t) + ([m - h + h * G] * M)(t) \\ &= m(1 + M(t)) - t + (h * G)(t) - (h * M)(t) + ([h * G] * M)(t) \\ &= m(1 + M(t)) - t + [h * \underbrace{(G - M + G * M)}_{=0 \text{ nach Prop 5.21}}](t) \\ &= m(1 + M(t)) - t, \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Aufgabe 11.5. Sei $N = (N_t)$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ. Bestimmen Sie die Verteilung von R_t.

Beweis. Da die Wartezeiten die Verteilungsfunktion $G(z) = 1 - e^{-\lambda z}$ haben und $M(t) = \lambda t$, folgt mit Lemma 5.26

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_t \le z) &= 1 - e^{-\lambda(t+z)} - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t+z-x)}dx \\ &= 1 - e^{-\lambda(t+z)} - e^{-\lambda(t+z)} \underbrace{\Big[e^{\lambda x}\Big]_0^t}_{=e^{\lambda t}-1} \\ &= 1 - e^{-\lambda z} = G(z). \end{aligned}$$

Die Wartezeit ist also exponentiell verteilt. Alternativ können wir auch bemerken, dass N ein stationärer Erneuerungsprozess N^H ist, wobei $H = G$ die Exponentialverteilung ist. Dann folgt die Behauptung direkt aus Prop. 5.33. □