Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1. Zeigen Sie, dass für jeden Erneuerungsprozess N_t gilt, dass

$$\mathbb{E}[N_t^2] = M(t) + 2\int_{(0,t]} M(t-s)\,dM(s).$$

<u>Hinweis:</u> Nutzen Sie ein Erneuerungsargument.

Aufgabe 11.2. Sei G eine Verteilungsfunktion mit $G(0) = 0$ und Erwartungswert $\int x\,dG(x) = m < \infty$, und wir schreiben $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$.

(a) Existiere nun auch die Varianz $\sigma^2 = \int (x-m)^2\,dG(x) < \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{t\to\infty} t^2 \bar{G}(t) = 0$ gilt.

(b) Sei

$$H(t) = \frac{1}{m}\int_0^t \bar{G}(y)\,dy,$$

die Funktion aus Definition 5.31. Zeigen Sie, dass H eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie den zugehörigen Erwartungswert.

Aufgabe 11.3. Sei $\bar{N} = N^H$ ein stationärer Erneuerungsprozess. Wir nehmen an, dass $\bar{N}$ unabhängige Zuwächse hat. Zeigen Sie, dass in dem Fall $\bar{N}$ ein Poisson-Prozess ist, indem Sie

(a) die Zufallsvariablen

$$Z_k^n := \left(\bar{N}_{\frac{kt}{n}} - \bar{N}_{\frac{(k-1)t}{n}}\right) \wedge 1, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n, \text{ sowie } t > 0$$

betrachten und zeigen, dass diese eine Folge unabhängiger Bernoulli(p_n) Zufallsvariablen mit Parameter $p_n := \mathbb{P}(\bar{N}_{t/n} \geq 1)$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass $np_n \to \lambda t$ für $n \to \infty$ und folgern Sie die Behauptung mit der Poissonapproximation der Binomialverteilung.

Aufgabe 11.4.

(a) Geben Sie einen direkten Beweis von

$$\mathbb{P}(R_t \leq y) = G(t+y) - \int_{(0,t]} \bar{G}(t+y-x)dM(x) \tag{5.32}$$

im Stile des Beweises von Proposition 5.33.

(b) Geben Sie einen alternativen Beweis von

$$\mathbb{E}R_t = m(1 + M(t)) - t \tag{5.33}$$

mit Hilfe eines Erneuerungsarguments ohne Verwendung der Wald'schen Identität.

Aufgabe 11.5. Sei $N = (N_t)$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ. Bestimmen Sie die Verteilung von R_t.