Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1. Beweisen Sie Proposition 5.17. aus der Vorlesung. D.h., zeigen Sie, dass für die Erneuerungsfunktion eines Erneuerungsprozesses gilt,

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t), \quad t \geq 0$$

und damit insbesondere

(i) $M(0) = 0$,

(ii) M ist wachsend,

(iii) M ist rechtsstetig,

(iv) $M(t) \to \infty$ für $t \geq \infty$.

Beweis. Zunächst gilt,

$$M(t) = \mathbb{E}N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_t \geq k) = \sum_{1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k \leq t) = \sum_{1}^{\infty} G^{*k}(t),$$

da T_k die Summe unabhängiger Zufallsvariablen ist, alle mit Verteilung G. Da $G(0) = 0$ nach Voraussetzung, folgt direkt $\mathbb{P}(W_1 \leq 0) = 0$, also $G^{*k}(0) = \mathbb{P}(\sum_1^k W_i \leq 0) = 0$ und damit (i). Da G^{*k} für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Verteilungsfunktion und damit wachsend ist, ist auch M als Summe wachsender Funktionen wachsend. Dies zeigt (ii). Zudem ist jedes G^{*k} damit auch rechtsstetig, womit direkt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} M(t+\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G^{*k}(t+\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t) = M(t),$$

also (iii) folgt, vorausgesetzt, wir durften Summe und Limes im ersten Schritt tatsächlich tauschen. Dies folgt aber aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, da für jedes $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ gilt $G^{*k}(t+\varepsilon_2) \geq G^{*k}(t+\varepsilon_1)$. (Beachte, dass wir den Grenzwert $\varepsilon \downarrow 0$ bilden und dass wir über k summieren, d.h., k spielt hier die Rolle der Integrationsvariable.) Für den letzten Punkt müssen wir zeigen, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $T > 0$ gibt, so dass $M(t) \geq N$ für alle $t \geq T$ gilt. Wegen der Monotonie (ii) reicht es, die Eigenschaft für T zu zeigen. Wir bemerken zunächst, dass, da die W_i strikt positiv sind, gilt für jedes k

$$G^{*k}(t) = \mathbb{P}\Big(\sum_{1}^{k} W_j \leq t\Big) \geq \mathbb{P}\Big(\sum_{1}^{k+1} W_j \leq t\Big) = G^{*(k+1)}(t).$$

Wähle nun T so, dass $G^{*2N}(T) \geq 1/2$, dann folgt

$$M(T) \geq \sum_{k=1}^{2N} G^{*k}(T) \geq 2N \cdot G^{*2N}(T) \geq N.$$

□

Aufgabe 10.2. Seien $(X_n : n \in \mathbb{N})$ und $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ zwei unabhängige Folgen, unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)$ und $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \le t\}$ der zugehörige Erneuerungsprozess. Bestimmen Sie die Erneuerungsfunktion $M(t) = \mathbb{E}N_t$.

Beweis. Sei $W_i := X_i + Y_i$. Dann bilden $W_1, W_2, \ldots$ mit Aufgabe 4.3 eine Folge unabhängiger $\Gamma(2, n)$ verteilter Zufallsvariablen. Aufgrund der Faltungsstabilität der Gammaverteilung sind die Partialsummen $S_n = \sum_1^n W_i$ also $\Gamma(2n, \lambda)$ verteilt. Es folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(N_t \ge n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(S_n \le t) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^t \frac{\lambda^{2n}}{(2n-1)!} x^{2n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^t e^{-\lambda x} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{(\lambda x)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)}_{=\sinh(\lambda x) = (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})/2} dx = \frac{\lambda}{2} \int_0^t (1 - e^{-2\lambda x}) dx \\ &= \frac{\lambda t}{2} + \frac{1}{4} \Big[e^{-2\lambda x} \Big]_0^t = \frac{2\lambda t - (1 - e^{-2\lambda t})}{4}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10.3. Sei N ein Erneuerungsprozess mit i.i.d. Wartezeiten $W_1, W_2, \ldots$ mit Verteilungsfunktion G und Intensität $\lambda \in (0, \infty)$. Wir nehmen an, dass N stationäre Zuwächse hat. Zeigen Sie, dass in dem Fall $M(t) = \lambda t$ gilt.

Beweis. Die stationarität bedeutet, dass $N_{t+s} - N_s \sim N_t$ für alle $s, t \ge 0$. Damit folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$M(n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[N_j - N_{j-1}] = nM(1).$$

Mit dem elementaren Erneuerungssatz folgt also einerseits

$$M(1) = \frac{M(n)}{n} \longrightarrow \lambda,$$

also auch andererseits $M(n) = \lambda n$ für jedes n. Analog gilt für jedes n

$$\lambda = M(1) = nM(1/n) \iff M(1/n)) = \lambda/n,$$

und damit $M(q) = \lambda q$ für jedes $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Nun kann jedes $Q \in \mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ geschrieben werden als $Q = n + q$ und damit

$$M(Q) = \mathbb{E}[N_n] + \mathbb{E}[N_q] = \lambda Q.$$

Die Aussage $M(t) = \lambda t$ für alle $t \ge 0$ folgt dann aus der Rechtsstetigkeit, siehe Aufgabe 10.1. □

Aufgabe 10.4. Sei $M(t) = \lambda t$ für ein $\lambda > 0$ die Erneuerungsfunktion eines Erneuerungsprozesses N mit i.i.d. Wartezeiten $W_1, W_2, \ldots$, die verteilt sind mit Verteilungsfunktion G. Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass N in diesem Fall ein Poisson-Prozess mit Rate λ ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Für eine rechtsstetige und nicht-fallende Funktion f mit $f(0) = 0$ definieren wir die *Laplace-Transformierte*

$$\widehat{f}(s) := \int_{[0,\infty)} e^{-sx} df(x).$$

Zeigen Sie, dass $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ für zwei solche Funktionen f und g gilt.

Hinweis: Partielle Integration.

(ii) Finden Sie eine Darstellung von $\widehat{G}$ mithilfe von $\widehat{M}$.

(iii) Folgern Sie aus der Darstellung, dass G die Verteilungsfunktion einer $\exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable ist.

Hinweis: Hierbei können Sie nutzen, dass die Laplace-Transformierte eine Verteilung eindeutig bestimmt.

Beweis.
Zu (i): Wir bezeichnen die mit $h = f * g$. Dann ist auch h eine rechtsstetige und wachsende Funktion mit $h(0) = 0$. Mit partieller Integration, der Definition der Faltung, und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} e^{-sx} dh(x) &= -\int_{[0,\infty)} h(x-) d(e^{-sx}) = s \int_{[0,\infty)} h(x-) e^{-sx} dx \\
&= s \int_{[0,\infty)} e^{-sx} \Big(\int_{[0,x)} f(x-t) dg(t) \Big) dx \\
&= s \int_{[0,\infty)} \Big(\int_{[t,\infty)} e^{-sx} f(x-t) dx \Big) dg(t) \\
&= s \int_{[0,\infty)} \Big(\int_{[0,\infty)} e^{-s(y+t)} f(y) dy \Big) dg(t) \\
&= \Big(\int_{[0,\infty)} e^{-st} dg(t) \Big) \Big(-\int_{[0,\infty)} f(y) d(e^{-sy}) \Big) \\
&= \widehat{g}(s) \int_{[0,\infty)} e^{-sy} df(y) = \widehat{g}(s) \widehat{f}(s).
\end{aligned}$$

Zu (ii): Aus der Erneuerungsgleichung von Proposition 5.21 folgt $G(t) = M(t) - (M * G)(t)$ und damit

$$\widehat{G}(s) = \int_{[0,\infty)} e^{-sx} d(M(x) - (M * G)(x)) = \widehat{M}(s) - \widehat{M * G}(s) = \widehat{M}(s) - \widehat{M}(s)\widehat{G}(s),$$

womit

$$\widehat{G}(s) = \frac{\widehat{M}(s)}{1 + \widehat{M}(s)}$$

folgt.
Zu (iii): Nach Voraussetzung $M(t) = \lambda t$, also $dM(t) = \lambda dt$, womit

$$\widehat{M}(s) = \lambda \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{\lambda}{s}$$

folgt. Aus (ii) folgt also $\widehat{G}(s) = \lambda/(\lambda + s)$. Sei nun F die Verteilungsfunktion einer $\exp(\lambda)$-Verteilung. Dann

$$\widehat{F}(s) = \lambda \int_0^\infty e^{-sx} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + s},$$

also $\widehat{G} = \widehat{F}$, womit nach dem Hinweis die Behauptung folgt. $\square$