Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1. Beweisen Sie Proposition 5.17. aus der Vorlesung. D.h., zeigen Sie, dass für die Erneuerungsfunktion eines Erneuerungsprozesses gilt,

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t), \quad t \geq 0$$

und damit insbesondere

(i) $M(0) = 0$,

(ii) M ist wachsend,

(iii) M ist rechtsstetig,

(iv) $M(t) \to \infty$ für $t \geq \infty$.

Aufgabe 10.2. Seien $(X_n : n \in \mathbb{N})$ und $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ zwei unabhängige Folgen, unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i)$ und $N_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$ der zugehörige Erneuerungsprozess. Bestimmen Sie die Erneuerungsfunktion $M(t) = \mathbb{E}N_t$.

Aufgabe 10.3. Sei N ein Erneuerungsprozess mit i.i.d. Wartezeiten $W_1, W_2, \ldots$ mit Verteilungsfunktion G und Intensität $\lambda \in (0, \infty)$. Wir nehmen an, dass N stationäre Zuwächse hat. Zeigen Sie, dass in dem Fall $M(t) = \lambda t$ gilt.

Aufgabe 10.4. Sei $M(t) = \lambda t$ für ein $\lambda > 0$ die Erneuerungsfunktion eines Erneuerungsprozesses N mit i.i.d. Wartezeiten $W_1, W_2, \ldots$, die verteilt sind mit Verteilungsfunktion G. Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass N in diesem Fall ein Poisson-Prozess mit Rate λ ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Für eine rechtsstetige und nicht-fallende Funktion f mit $f(0) = 0$ definieren wir die *Laplace-Transformierte*

$$\widehat{f}(s) := \int_{[0,\infty)} e^{-sx} df(x).$$

Zeigen Sie, dass $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$ für zwei solche Funktionen f und g gilt.

Hinweis: Partielle Integration.

(ii) Finden Sie eine Darstellung von $\widehat{G}$ mithilfe von $\widehat{M}$.

(iii) Folgern Sie aus der Darstellung, dass G die Verteilungsfunktion einer $\exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable ist.

Hinweis: Hierbei können Sie nutzen, dass die Laplace-Transformierte eine Verteilung eindeutig bestimmt.