Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1. Sei X eine nichtnegative gedächtnislose Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion stetig ist. Zeigen Sie, dass X exponentialverteilt zu einem Parameter $\lambda > 0$ ist.

Beweis. Seien $s, t \geq 0$, dann bedeutet die Gedächtnislosigkeit von X, dass

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Sei $\bar{F} = 1 - F$ die Tail-Verteilungsfunktion von X, die insbesondere stetig ist. Da X nichtnegativ ist, gilt außerdem $\bar{F}(0) = 1$. Damit können wir die rechte Seite schreiben als $\bar{F}(t)$ und die linke Seite als

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\bar{F}(s + t)}{\bar{F}(s)}.$$

Das bedeutet aber, dass $\bar{F}$ die Eigenschaft

$$\bar{F}(s + t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t) \tag{1}$$

hat. Wir setzen $\lambda := -\log \mathbb{P}(X > 1)$. Dann gilt also $\bar{F}(0) = e^{-\lambda \cdot 0}$ und $\bar{F}(1) = e^{-\lambda}$. Außerdem folgt aus (1) induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\bar{F}(n) = e^{-\lambda n} = (\bar{F}(1))^n$. Ebenso folgt

$$\bar{F}(1) = (\bar{F}(1/n))^n \Longrightarrow \bar{F}(1/n) = (\bar{F}(1))^{1/n} = e^{-\lambda/n}.$$

Somit folgt für alle $q \in \mathbb{Q}$, dass $\bar{F}(q) = e^{-\lambda q}$. Aus der Stetigkeit von $\bar{F}$ folgt damit $F(t) = e^{-\lambda t}$ für alle $t \geq 0$, also die Behauptung. □

Aufgabe 9.2. Sei $N = (N_t : t \geq 0)$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass

$$M_t := N_t - \lambda t$$

ein Martingal bezüglich der durch $\mathcal{F}_s = \sigma\Big(N_u : 0 \leq u \leq s\Big)$ gegebenen kanonisches Filtration ist.

Beweis. Die Adaption an $(\mathcal{F}_s : s \geq 0)$ ist klar. Für die Integrierbarkeit nutzen wir Eigenschaft (iii) des Poisson-Prozesses und erhalten

$$\mathbb{E}|M_t| \leq \mathbb{E}N_t + \lambda t = \mathbb{E}[\text{Poisson}(\lambda t)] + \lambda t < \infty.$$

Insbesondere folgt also

$$\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}N_t - \lambda t = \lambda t - \lambda t = 0.$$

Für die Martingaleigenschaft betrachten wir zunächst für $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}[N_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[N_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\bar{N}_{t-s}] + N_s = \lambda(t - s) + N_s,$$

dabei ist $\bar{N}_t = N_t - N_s$ der von $\mathcal{F}_s$ unabhängige Poisson-Prozess aus Proposition 5.5', womit außerdem auch $\mathbb{E}\bar{N}_{t-s} = \lambda(t - s)$ aus Eigenschaft (iii) des Poisson-Prozesses folgt. Damit

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = N_s - \lambda s$$

also die Behauptung. □

Aufgabe 9.3. Die Personen A und B melden ihrer Versicherung Schäden gemäß unabhängiger Poisson-Prozesse $N^{(A)}$ bzw. $N^{(B)}$ mit Intensitäten $\lambda^{(A)} > 0$ bzw. $\lambda^{(B)} > 0$.

(a) Betrachten wir nun die Summe der gemeldeten Schäden beider Versicherungsnehmer. Zeigen Sie, dass $N := N^{(A)} + N^{(B)}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda^{(A)} + \lambda^{(B)}$ ist.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Person A zuerst einen Schaden meldet.

Beweis.
Zu (a): Wir nutzen Bemerkung 5.6, wonach die Eigenschaften von Proposition 5.5 definierend für einen Poisson-Prozess sind. Offenbar ist $N_0 = 0$ und N ist rechtsstetig als Summe rechtsstetiger Funktionen, was (iv) zeigt. Seien $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ und betrachte die Zuwächse

$$N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = \left(N_{t_j}^{(A)} - N_{t_{j-1}}^{(A)}\right) + \left(N_{t_j}^{(B)} - N_{t_{j-1}}^{(B)}\right) \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Da sowohl $N^{(A)}$ als auch $N^{(B)}$ unabhängige Zuwächse haben und unabhängig von einander sind, sind auch die Zuwächse von N unabhängig. Dies zeigt Eigenschaft (ii). Weiter gilt, da $N^{(A)}$ und $N^{(B)}$ Poisson-Prozesse mit Raten $\lambda^{(A)}$ bzw. $\lambda^{(B)}$ sind, dass

$$N_{t+s} - N_s = \underbrace{\left(N_{t+s}^{(A)} - N_s^{(A)}\right)}_{\sim \text{Poisson}(\lambda^{(A)} t)} + \underbrace{\left(N_{t+s}^{(B)} - N_s^{(B)}\right)}_{\sim \text{Poisson}(\lambda^{(B)} t)} \sim \text{Poisson}\left((\lambda^{(A)} + \lambda^{(B)})t\right)$$

als Summe unabhängiger Poisson-Zufallsvariablen. Dies zeigt Eigenschaft (iii) und damit (a).
Zu (b): Da die beiden Prozesse unabhängig sind, sind auch die Wartezeiten unabhängig. Person A meldet zuerst einen Schaden, falls $W_1^{(A)} < W_1^{(B)}$. Die Wahrscheinlichkeit hierzu ist

$$\mathbb{P}(W_1^{(A)} < W_1^{(B)}) = \lambda^{(A)} \int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}(w < W_1^{(B)})}_{= e^{-\lambda^{(B)} w}} e^{-\lambda^{(A)} w} \, dw = \frac{\lambda^{(A)}}{\lambda^{(A)} + \lambda^{(B)}}.$$

□

Aufgabe 9.4. Die Anzahl der Studierenden, die eine Sprechstunde für den Kurs Versicherungsmathematik besuchen, sei poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Diese Studierende seien mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ unabhängig voneinander im Bachelor und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ im Master.

(a) Seien Y und Z die Anzahl an Bachelor- bzw. Masterstudierenden bei der Sprechstunde. Zeigen Sie, dass $Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$.

(b) Zeigen Sie, dass Y und Z unabhängig sind.

Bemerkung: Y heißt die *Ausdünnung* von X mit Überlebenswahrscheinlichkeit p. Aus (i) und (ii) folgt automatisch die Faltungsstabilität der Poissonverteilung.

Beweis.
Zu (a): Sei N die Anzahl an Sprechstunden-Besucher*innen. Also ist N poissonverteilt mit Parameter λ. Da die Zuweisung der Studierenden zu Bachelor und Master unabhängig von der Anzahl der Besucher*innen ist, können wir auch

$$Y = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

schreiben, wobei $X_1, X_2, \dots$ eine von N unabhängige Folge unabhängiger Bernoulli(p) verteilter Zufallsvariablen ist, wobei $X_j = \mathbb{1}_{\{\text{Besucher*in } j \text{ im Bachelor}\}}$. Bedingt auf $N = n$, ist Y also insbesondere Binomial(n, p) verteilt. Es folgt für $k \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j = k\Big) = e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!} \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}}_{=e^{\lambda(1-p)}} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p},\end{aligned}$$

wie behauptet.
Zu (b): Analog zu (a) folgt natürlich auch, dass Z poissonverteilt ist mit Parameter $(1-p)\lambda$. Zudem können wir $Z = N - Y$ schreiben. Seien nun $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, dann folgt, wie in (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k, Z = \ell) &= \mathbb{P}(Y = k, N - Y = \ell) = \mathbb{P}(Y = k, N = \ell + k) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^{\ell} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^{\ell}}{\ell!} \\ &= \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z = \ell),\end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt. $\square$