

## Übungsblatt 9

**Aufgabe 9.1.** Sei  $X$  eine nichtnegative gedächtnislose Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion stetig ist. Zeigen Sie, dass  $X$  exponentialverteilt zu einem Parameter  $\lambda > 0$  ist.

**Aufgabe 9.2.** Sei  $N = (N_t : t \geq 0)$  ein Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, dass

$$M_t := N_t - \lambda t$$

ein Martingal bezüglich der durch  $\mathcal{F}_s = \sigma(N_u : 0 \leq u \leq s)$  gegebenen kanonischen Filtration ist.

**Aufgabe 9.3.** Die Personen A und B melden ihrer Versicherung Schäden gemäß unabhängiger Poisson-Prozesse  $N^{(A)}$  bzw.  $N^{(B)}$  mit Intensitäten  $\lambda^{(A)} > 0$  bzw.  $\lambda^{(B)} > 0$ .

- Betrachten wir nun die Summe der gemeldeten Schäden beider Versicherungsnehmer. Zeigen Sie, dass  $N := N^{(A)} + N^{(B)}$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda^{(A)} + \lambda^{(B)}$  ist.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Person A zuerst einen Schaden meldet.

**Aufgabe 9.4.** Die Anzahl der Studierenden, die eine Sprechstunde für den Kurs Versicherungsmathematik besuchen, sei poissonverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ . Diese Studierende seien mit Wahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$  unabhängig voneinander im Bachelor und mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  im Master.

- Seien  $Y$  und  $Z$  die Anzahl an Bachelor- bzw. Masterstudierenden bei der Sprechstunde. Zeigen Sie, dass  $Y \sim \text{Poisson}(\lambda p)$ .
- Zeigen Sie, dass  $Y$  und  $Z$  unabhängig sind.

*Bemerkung:*  $Y$  heißt die *Ausdünnung* von  $X$  mit Überlebenswahrscheinlichkeit  $p$ . Aus (i) und (ii) folgt automatisch die Faltungsstabilität der Poissonverteilung.