Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1. Zeigen Sie, dass die Legendre-Transformierte $x \mapsto \sup_t(tx - \Lambda(t))$ von Λ konvex ist.

Beweis. Sei $\theta \in (0,1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I(\theta x + (1-\theta)y) &= \sup_{t\in\mathbb{R}}(t\theta x + (1-\theta)ty - \Lambda(t)) \\ &= \sup_t \Big(t\theta x - \theta\Lambda(t) + (1-\theta)ty - (1-\theta)\Lambda(t)\Big) \\ &\le \sup_t \Big(t\theta x - \theta\Lambda(t)\Big) + \sup\Big((1-\theta)ty - (1-\theta)\Lambda(t)\Big) \\ &\le \theta I(x) + (1-\theta)I(y). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8.2. Bestimmen Sie die Ratenfunktionen der Exponential-, Poisson und Bernoulliverteilung.

Beweis. Wir starten mit der Exponentialverteilung und berechnen zunächst die MEF. Für $t < \lambda$ erhalten wir

$$\psi_E(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda-t)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

und damit $\Lambda_E(t) = \log\psi_E(t) = \log\lambda - \log(\lambda - t)$. Um die Ratenfunktion zu bestimmen, suchen wir für festes x das Maximum von $t \mapsto tx - \log\lambda + \log(\lambda - t)$. Durch Ableiten erhalten wir

$$0 = x - \frac{1}{\lambda - t_x} \Leftrightarrow t_x = \lambda - 1/x.$$

Damit erhalten wir also $I_E(x) = \lambda x - 1 - \log\lambda - \log(x) = \lambda x - 1 - \log(\lambda x)$ für $x \ge 1/\lambda$. Ansonsten wäre I_E nämlich negativ, was nicht sein kann. In dem Fall ist das Maximum dann gegeben durch $t_x = 0$ also $I_E(x) = 0$ für alle $x < 1/\lambda$.
Auch für die Poissonverteilung starten wir mit der MEF. Für diese gilt

$$\psi_P(t) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^\infty e^{tn}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

und damit $\Lambda_P(t) = \lambda(e^t - 1)$. Für die Ratenfunktion erhalten wir wieder durch Ableiten den Maximierer

$$0 = x - \lambda e^{t_x} \Leftrightarrow e^{t_x} = x/\lambda \Leftrightarrow t_x = \log(x/\lambda).$$

Damit folgt $I_P(t) = x\log(x/\lambda) - \lambda(x/\lambda - 1) = x\log(x/\lambda) - x + \lambda$ für positive x. Ansonsten $I_P(x) = 0$ mit der gleichen Begründung wie oben.
Die MEF der Bernoulliverteilung ist nach Übungsblatt 7

$$\psi_B(t) = pe^t + (1-p)e^0 = 1 + p(e^t - 1),$$

also $\Lambda_B(t) = \log(1 + p(e^t - 1))$. Wieder betrachten wir $t \mapsto tx - \Lambda_B(t)$ und erhalten durch Ableiten zunächst für $x \in (0,1)$

$$0 = x - \frac{pe^{t_x}}{1 + p(e^{t_x} - 1)} \Leftrightarrow x + pxe^{t_x} - px = pe^{t_x} \Leftrightarrow (1-p)x = pe^{t_x}(1-x)$$
$$\Leftrightarrow t_x = \log((1-p)x) - \log(p(1-x)).$$

Wir erhalten durch einsetzen

$$\begin{aligned} I_B(x) &= x\log((1-p)x) - x\log(p(1-x)) - \log(\tfrac{1-p}{1-x}) \\ &= x\log(\tfrac{x}{p}) + (1-x)\log(\tfrac{1-p}{1-x}). \end{aligned}$$

Für $x = p$ ist dies Null, wie erwartet. Da für $x < p$ die Funktion negativ würde, erhalten wir $I_B(x) = 0$ für alle $x < p$. Da die obige Funktion gegen unendlich divergiert für $x \to 1$ und wegen der Konvexität, erhalten wir zusätzlich $I_B(x) = \infty$ für alle $x \geq 1$ und damit die obige Form für $p \leq x < 1$. $\square$

Aufgabe 8.3. Ein Versicherungsunternehmen hat $n \in \mathbb{N}$ Kunden. Jeder Kunde bezahlt am Anfang eines bestimmten Jahres 10 Euro Prämie an das Unternehmen und danach nichts mehr. Während des Jahres meldet jeder Kunde einen normalverteilten Schaden mit Erwartungswert 8 Euro und Standardabweichung 1 Euro, der unabhängig von den Schäden der anderen Kunden ist. (Wir ignorieren die Zinseffekte.)

(a) Sei p_n die Wahrscheinlichkeit des „Ruins” des Versicherungsunternehmens bis zum Ende des Jahres, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass das Unternehmen nicht alle Schäden von den angekommenen Prämien bezahlen kann. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_n$.

(b) *Überprüfung der Modellierung.* Sei q_n die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe aller Schäden nichtpositiv ist. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n$. Wieso ist die Modellierung hier gerechtfertigt, obwohl theoretisch

Rechtfertigung des Modells: Es ist in diesem Modell möglich, dass negative Schäden auftreten. Dieses schließen wir üblicherweise aus. Man kann diese Modellierung jedoch rechtfertigen, da die Wahrscheinlichkeit eines negativen Schadens bei ungefähr 10^{-15} liegt.

Beweis. Das Unternehmen nimmt $10n$ Euro ein. Nach definition ist damit $p_n = \mathbb{P}(S_n \geq 10n) = \mathbb{P}(S_n - 8n \geq 2n)$. Wir bemerken nun, dass $S_n - 8n$ Standardnormalverteilt ist. Für die MEZ der Normalverteilung erhalten wir

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2+tx} dx = e^{-t^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx}_{=1} = e^{-t^2/2}.$$

Daher $\Lambda(t) = -t^2/2$ für alle t. Wir betrachten $t \mapsto tx - t^2/2$ und erhalten durch Ableiten

$$0 = x - t_x \Leftrightarrow t_x = x,$$

also $I(x) = x^2/2$. Mit dem Satz von Cramér erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log p_n = -I(2) = -2.$$

Für q_n erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log P(S_n \le 0)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log P(S_n - 8n \le -8n)}{n} = -I(8) = -32.$$

□

Aufgabe 8.4. Beweisen Sie Proposition 4.55 aus der Vorlesung.

Beweis. Für die Binomialverteilung mit Parametern m, p gilt offenbar $p_0 = (1-p)^m$. Für jedes $n \ge 1$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} p_n &= \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} = \binom{m}{n-1} \frac{m+1-n}{n} p^{n-1} p (1-p)^{m-(n-1)} (1-p)^{-1} \\ &= p_{n-1} \frac{p}{1-p} \Big(\frac{m+1}{n} - 1 \Big). \end{aligned}$$

Für die Poissonverteilung siehe Skript. Für die negative Binomialverteilung mit den Parametern β und p erhalten wir $p_0 = p^\beta$ nach Definition, sowie

$$\begin{aligned} p_n &= \binom{\beta+n-1}{n} p^\beta (1-p)^n = \frac{(\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1)}{n(n-1)!\Gamma(\beta)} p^\beta (1-p)^{n-1} (1-p) \\ &= p_{n-1} \frac{\beta+n-1}{n} (1-p) = \Big(\frac{\beta-1}{n} + 1 \Big) (1-p) p_{n-1}, \end{aligned}$$

da $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. □