Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. Wir betrachten $k \in \mathbb{N}$ verschiedene, unabhängige Standardmodelle $(N^{(i)}, (X_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}))$ für $i = 1, \ldots, k$, wobei die $N^{(i)}$ jeweils poissonverteilt mit Parameter $\lambda^{(i)} > 0$ seien. Sei $S^{(i)}$ der Gesamtschaden von Portfolio i und

$$S = \sum_{i=1}^{k} S^{(i)}$$

der Gesamtschaden aller k Portfolios. Wir betrachten ein weiteres Standardmodell $(\bar{N}, (\bar{X}_n : n \in \mathbb{N}))$, wobei $\bar{N}$ poissonverteilt sei mit Parameter $\lambda = \lambda^{(1)} + \cdots + \lambda^{(k)}$. Sei weiter die Verteilungsfunktion der Schadenhöhen gegeben durch

$$F_{\bar{X}_1}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} F_{X_1^{(i)}}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

und bezeichne mit $\bar{S}$ den zum Portfolio gehörenden Gesamtschaden.

(a) Zeigen Sie, dass $F_{\bar{X}_1}$ tatsächlich eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass S und $\bar{S}$ dieselbe Verteilung haben.

Beweis.
Zu (a): Da Schäden positiv sind, sollte $F_{\bar{X}_1(0)=0}$ gelten, was auch direkt aus $F_{X_i}(0) = 0$ für alle i folgt. (Analog würde sich natürlich auch $\lim_{x\to-\infty} F_{X_i}(x) = 0$ direkt übertragen). Weiter gilt

$$\lim_{x\to\infty} F_{\bar{X}_1}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} = 1,$$

nach Definition von λ. Ebenso ist $F_{\bar{X}_1}$ als linear Kombination aus rechtsstetigen und monoton wachsenden Funktionen ebenfalls rechtsstetig und monoton wachsend, also eine Verteilungsfunktion.
Zu (b): Siehe Beweis von Satz 3.34. □

Aufgabe 7.2. In dem Beweis der Cantelli-Ungleichung haben wir für alle $x \in (-c, \infty)$ hergeleitet, dass

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}X + c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X) + x^2}{(c+x)^2}.$$

Finden Sie die optimale Schranke in x und vergleichen Sie diese mit der Cantelli-Ungleichung.

Beweis. Wir schreiben $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Wir wollen die Funktion $r(x) = (\sigma^2 + x^2)/(c+x)^2$ minimieren. Dazu bestimmen wir die Ableitung

$$r'(x) = \frac{2x(c+x)^2 - 2(x+c)(\sigma^2 + x^2)}{(c+x)^4} = \frac{2cx - 2\sigma^2}{(c+x)^3},$$

Wir erhalten $r'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sigma^2/c$. Da r für $x > -c$ konvex ist, handelt es sich bei σ^2/c um einen Minimierer. Dieses x haben wir auch genutzt, um den Beweis der Cantelli-Ungleichung abzuschließen. Es handelt sich also, für diesen Ansatz, um die bestmögliche Schranke. □

Am 12.12. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.

Aufgabe 7.3. Beweisen Sie mit Hilfe der Cantelli-Ungleichung die folgende Tschebyscheff-artige Ungleichung: Ist X eine reelle Zufallsvariable mit endlicher Varianz, so gilt für alle $c > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq c) \leq \frac{2\mathbb{V}[X]}{c^2 + \mathbb{V}[X]}.$$

Ist sie besser oder schlechter als die Tschebyscheffsche Ungleichung?

Beweis. Sei $Y = -X$, dann ist $\mathbb{E}Y = -\mathbb{E}X$ und $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y)$. Wir erhalten mit der Cantelli-Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq c) &= \mathbb{P}(X - \mathbb{E}X \geq c) + \mathbb{P}(Y - \mathbb{E}Y \geq c)\\ &\leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{c^2 + \operatorname{Var}(X)} + \frac{\operatorname{Var}(Y)}{c^2 + \operatorname{Var}(Y)}\\ &= \frac{2\operatorname{Var}(X)}{c^2 + \operatorname{Var}(X)}.\end{aligned}$$

Da die Tschebycheffe-Ungleichung die Schranke $\operatorname{Var}(X)/c^2$ liefert, ist diese besser, wenn

$$\frac{\operatorname{Var}(X)}{c^2} \leq \frac{2\operatorname{Var}(X)}{c^2 + \operatorname{Var}(X)} \Leftrightarrow \operatorname{Var}(X) \leq c^2.$$

□

Aufgabe 7.4. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und bernoulliverteilte Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. Ziel der Aufgabe ist es, die *Chernoff-Ungleichung*

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^n X_j \geq (1+\varepsilon)pn\Big) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{3}pn}, \qquad \text{für all } \varepsilon \in (0,1)$$

herzuleiten.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon \in (0,1)$ die Ungleichung

$$(1+\varepsilon)\log(1+\varepsilon) \geq \varepsilon + \tfrac{\varepsilon^2}{3}$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktionen auf der linken bzw. rechten Seite der Ungleichung konvex sind.

(b) Bestimmen Sie momenterzeugenden Funktion ψ_{X_1} und zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ und $z > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^n X_j \geq x\Big) \leq e^{-xz}(1 + p(e^z - 1))^n.$$

(c) Schließen Sie den Beweis, indem Sie $z = \log(1+\varepsilon)$ wählen.

Am 12.12. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.

Beweis.
Zu (a): Sei $\ell(x) = (1+x)\log(1+x)$ und $r(x) = x + x^2/3$, dann ist es leicht zu sehen, dass

$$\ell''(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \qquad \text{für alle } x > 0$$

und

$$r''(x) = \frac{2}{3} > 0 \qquad \text{für alle } x > 0,$$

womit gezeigt ist, dass beide Funktionen konvex sind. Weiter gilt

$$\ell(0) = 0 \geq 0 = r(0) \quad \text{sowie} \quad \ell(1) = 2\log(2) > 1 + 1/3 = r(1),$$

womit die Ungleichung folgt.
Zu (b): Für die momenterzeugenden Funktion einer Bernoulli Zufallsvariable gilt

$$\psi_{X_1}(z) = e^0(1-p) + e^z p = 1 + p(e^z - 1)$$

und mit der Markov-Ungleichung angewendet auf $y \mapsto e^{zy}$

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j \geq x\Big) \leq e^{-xz}(1 + p(e^z - 1))^n.$$

Zu (c): Wir wählen $x = (1+\varepsilon)pn$ für die rechte Seite aus (b) und erhalten

$$e^{-(1+\varepsilon)pnz}(1 + p(e^z - 1))^n = \exp\Big(-(1+\varepsilon)pnz + n\log[1 + p(e^z - 1)]\Big).$$

Wir setzen $z = \log(1+\varepsilon)$ und erhalten für den Exponenten, nachdem wir $-n$ noch ausklammern,

$$p(1+\varepsilon)\log(1+\varepsilon) - \log(1+p\varepsilon) \geq p\varepsilon + p\epsilon^2/3 - \log(1+p\varepsilon) \geq p\varepsilon^2/3,$$

wobei wir in der ersten Ungleichung (a) und in der zweiten Ungleichung $\log(1+x) \leq x$ für $x > 0$ benutzt haben. Die Behauptung folgt dann durch Einsetzen in (b). □

Am 12.12. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.