Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. Wir betrachten $k \in \mathbb{N}$ verschiedene, unabhängige Standardmodelle $(N^{(i)}, (X_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}))$ für $i = 1, \dots, k$, wobei die $N^{(i)}$ jeweils poissonverteilt mit Parameter $\lambda^{(i)} > 0$ seien. Sei $S^{(i)}$ der Gesamtschaden von Portfolio i und

$$S = \sum_{i=1}^{k} S^{(i)}$$

der Gesamtschaden aller k Portfolios. Wir betrachten ein weiteres Standardmodell $(\bar{N}, (\bar{X}_n : n \in \mathbb{N}))$, wobei $\bar{N}$ poissonverteilt sei mit Parameter $\lambda = \lambda^{(1)} + \cdots + \lambda^{(k)}$. Sei weiter die Verteilungsfunktion der Schadenhöhen gegeben durch

$$F_{\bar{X}_1}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda^{(i)}}{\lambda} F_{X_1^{(i)}}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

und bezeichne mit $\bar{S}$ den zum Portfolio gehörenden Gesamtschaden.

(a) Zeigen Sie, dass $F_{\bar{X}_1}$ tatsächlich eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass S und $\bar{S}$ dieselbe Verteilung haben.

Aufgabe 7.2. In dem Beweis der Cantelli-Ungleichung haben wir für alle $x \in (-c, \infty)$ hergeleitet, dass

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}X + c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X) + x^2}{(c+x)^2}.$$

Finden Sie die optimale Schranke in x und vergleichen Sie diese mit der Cantelli-Ungleichung.

Aufgabe 7.3. Beweisen Sie mit Hilfe der Cantelli-Ungleichung die folgende Tschebyscheff-artige Ungleichung: Ist X eine reelle Zufallsvariable mit endlicher Varianz, so gilt für alle $c > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq c) \leq \frac{2\mathbb{V}[X]}{c^2 + \mathbb{V}[X]}.$$

Ist sie besser oder schlechter als die Tschebyscheffsche Ungleichung?

Aufgabe 7.4. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und bernoulliverteilte Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. Ziel der Aufgabe ist es, die *Chernoff-Ungleichung*

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j \geq (1+\varepsilon)pn\Big) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{3}pn}, \qquad \text{für all } \varepsilon \in (0,1)$$

herzuleiten.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon \in (0,1)$ die Ungleichung

$$(1+\varepsilon)\log(1+\varepsilon) \geq \varepsilon + \tfrac{\varepsilon^2}{3}$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion linke Seite-rechte Seite stirkt konkav ist.

Am 12.12. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.

(b) Bestimmen Sie momenterzeugenden Funktion ψ_{X_1} und zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ und $z > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j \geq x\Big) \leq e^{-xz}(1 + p(e^z - 1))^n.$$

(c) Schließen Sie den Beweis, indem Sie $z = \log(1 + \varepsilon)$ wählen.

Am 12.12. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.