Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1. Finden Sie eine Verteilungsfunktion, für die für alle $\lambda > 0$ einerseits

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = 0$$

und andererseits

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty$$

gilt.

Beweis. Sei $F_o(x) = 1 - e^{-x^{0.9}}$ die Verteilungsfunktion einer Weibull-Verteilung mit Parametern $\lambda = 1$ und $\alpha = 0.9$. Offenbar gilt für alle $\lambda > 0$, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_o(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty.$$

Sei außerdem $F_u(x) = 1 - e^{-x^{1.1}}$ eine weitere Weibull-Verteilung mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}_u(x)}{e^{-\lambda x}} = 0.$$

Offenbar gilt außerdem $\bar{F}_o \geq \bar{F}_u$. Wir konstruieren nun ein $\bar{F}$, das die geforderten Grenzwert-Eigenschaften erfüllt und zusätzlich:

- $\lim_{x\to-\infty} \bar{F}(x) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x) = 0$,
- $\bar{F}$ ist monoton fallend und
- rechtsstetig.

Wir setzen $\bar{F}(x) = 1$ für alle $x < 0$. Wir konstruieren $\bar{F}$ nun Abschnittsweise. Sei dazu $y_0 = 0$. Wir setzen $\bar{F}(x) = \bar{F}_o(x)$ für alle $x \in [y_0, y_0+100)$. Für $x \in [y_0+100, y_0+200)$ setzen wir nun $\bar{F}(x) = \bar{F}_u(x)$. Sei schließlich y_1 die Lösung von

$$\bar{F}_o(y_1) = \bar{F}_u(y_0 + 200),$$

welche wegen Monotonie und Stetigkeit eindeutig existiert und für die insbesondere auch $y_1 > y_0 + 200$ gilt. Dann setzen wir $\bar{F}(x) = \bar{F}_u(y_0 + 200)$ auf $[y_0 + 200, y_1)$. D.h., die Funktion folgt innerhalb $[y_0, y_1)$ erst $\bar{F}_o$ für 100 Einheiten, springt dann nach unten und folgt $\bar{F}_u$ für weitere 100 Einheiten und bleibt dann Konstant, bis sie wieder von $\bar{F}_o$ eingeholt wird. Diese Konstruktion setzen wir nun induktiv fort. Sei y_n schon konstruiert, dann definieren wir $y_{n+1} > y_n + 200$ als die eindeutige Lösung $\bar{F}_o(y_{n+1}) = \bar{F}_u(y_n + 200)\}$. Für $x \in [y_n, y_{n+1})$ ist $\bar{F}$ dann gegeben durch

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \bar{F}_o(x), & x \in [y_n, y_n + 100), \\ \bar{F}_u(x), & x \in [y_n + 100, y_n + 200), \\ \bar{F}_u(y_n + 200), & x \in [y_n + 200, y_{n+1}). \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass dieses $\bar{F}$ alle gewünschten Eigenschaften hat. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist dann $F = 1 - \bar{F}$. □

Die Vorlesungen vom 04.12. findet ersatzweise am 05.12. zum Übungstermin statt.
Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.

Aufgabe 6.2. Zeigen Sie, dass die Pareto-Verteilung heavy-tailed ist. Zeigen Sie weiter, dass die Weibull-Verteilung genau dann heavy-tailed ist, wenn $\alpha < 1$.
Hinweis: Die Verteilungen finden Sie z.B. in Tabelle II.1 im Skript.

Beweis. Nach Proposition 4.9 ist $\limsup e^{\mu x}\bar{F}(x) < \infty$ für ein $\mu > 0$ äquivalent dazu light-tailed zu sein. Sei nun $F_{\kappa,\alpha}$ die Verteilungsfunktion einer Pareto-Verteilung. Dann gilt

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\mu x}\bar{F}_{\kappa\alpha}(x) = \limsup_{x\to\infty} \kappa^\alpha e^{\mu x} x^{-\alpha} = \infty$$

für alle $\mu > 0$ und damit $F_{\kappa,\alpha} \in \mathcal{K}$. Für die Weibull-Verteilung $G_{\lambda,\alpha}$ gilt wiederum

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\mu x}\bar{G}_{\lambda,\alpha}(x) = \limsup_{x\to\infty} e^{x(\mu-\lambda x^{\alpha-1})} < \infty$$

genau dann, wenn $\alpha > 1$ oder $\alpha = 1$ und $\mu \leq \lambda$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 6.3.

(a) Sei N negativ binomial verteilt mit Parametern $\alpha > 0$ und $p = \beta/(\beta+1)$ für eine $\beta > 0$. D.h.

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{\alpha+n-1}{n} p^\alpha (1-p)^n,$$

wobei $\binom{\alpha+n-1}{n} := \Gamma(\alpha+n)/(n!\Gamma(\alpha))$. Zeigen Sie, dass N gemischt Poisson verteilt ist, mit $\Gamma(\alpha,\beta)$ verteiltem Mischungsparameter.

(b) Sei nun N gemischt Poisson verteilt mit Pareto $P(\kappa,\alpha)$ verteiltem Mischungsparameter. Sei $f_{\kappa,\alpha}(x) = \frac{\alpha\kappa^\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(x)$, die Dichte der Pareto-Verteilung. Zeigen Sie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(N = n)}{f_{\kappa,\alpha}(n)} = 1$$

Hinweis: Für die Gamma-Funktion gilt sowohl $\Gamma(n) = (n-1)!$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, als auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} x^{-a} = 1$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Beweis.
Zu (a): Sei M eine Mischung aus der Poisson-Verteilung und der Gamma-Verteilung mit Parametern α, β. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(M = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta\lambda}\lambda^{\alpha-1}d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{n!\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{-\lambda(1+\beta)}\lambda^{n+\alpha-1}d\lambda.$$

Wir substituieren $x = (1+\beta)\lambda$. Dann bleiben die Integralgrenzen unverändert und $d\lambda = dx/(1+\beta)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M = n) &= \frac{\beta^\alpha}{n!\Gamma(\alpha)(1+\beta)^{n+\alpha}}\int_0^\infty e^{-x}x^{n+\alpha-1}dx = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\Big(\frac{\beta}{\beta+1}\Big)^\alpha\Big(\underbrace{\frac{1}{\beta+1}}_{1-\frac{\beta}{\beta+1}}\Big)^n \\ &= \mathbb{P}(N = n),\end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt.
Zu (b): Es gilt nach Definition der gemischten Poissonverteilung

$$\mathbb{P}(M=n) = \alpha\kappa^\alpha \int_\kappa^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\lambda^{-\alpha-1}d\lambda = \frac{\alpha\kappa^\alpha}{\Gamma(n+1)}\int_\kappa^\infty e^{-\lambda}\lambda^{n-\alpha-1}d\lambda$$
$$= \alpha\kappa^\alpha\frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\alpha\kappa^\alpha}{n!}\int_0^\kappa e^{-\lambda}\lambda^{n-\alpha-1}d\lambda,$$

womit direkt

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(N=n)}{f_{\kappa,\alpha}(n)} \le \limsup_{n\to\infty} n^{\alpha+1}\frac{\Gamma(n+1-\alpha-1)}{\Gamma(n+1)} = 1$$

aus dem Hinweis folgt. Ferner gilt für $n > \alpha+1$, dass

$$\int_0^\kappa e^{-\lambda}\lambda^{n-\alpha-1}d\lambda \le \kappa e^0\kappa^{n-\alpha-1} = \kappa^{n-\alpha},$$

Wegen $\kappa^{n+1}/n! \to 0$, folgt damit dann

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(N=n)}{f_{\kappa,\alpha}(n)} \ge \liminf_{n\to\infty}\left(n^{\alpha+1}\frac{\Gamma(n+1-\alpha-1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\kappa^{n+1}}{n!}\right) = 1$$

und somit die Behauptung. □

Aufgabe 6.4.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen der Binomial-, $\mathrm{Bin}(n,p)$, der Poisson-, $\mathrm{Pois}(\lambda)$, und der negativen Binomialverteilung, $\mathrm{Bin}^-(\alpha,p)$

(b) Zeigen Sie, dass diese Verteilungen faltungsstabil sind, d.h.

  (i) $\mathrm{Bin}(n_1,p)\star\mathrm{Bin}(n_2,p) = \mathrm{Bin}(n_1+n_2,p)$,
  (ii) $\mathrm{Pois}(\lambda_1)\star\mathrm{Pois}(\lambda_2) = \mathrm{Pois}(\lambda_1+\lambda_2)$,
  (iii) $\mathrm{Bin}^-(\alpha_1,p)\star\mathrm{Bin}^-(\alpha_2,p) = \mathrm{Bin}^-(\alpha_1+\alpha_2,p)$.

Beweis.
Zu (a): Es gilt für eine binomialverteilte Zufallsvariable X,

$$\phi_{n,p}(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{j=0}^n t^j\binom{n}{j}p^jn^{n-j} = \sum_{j=0}^n\binom{n}{j}(tp)^j(1-p)^{n-j} = (tp+1-p)^n,$$

für alle $t>0$.
Für die Poissonverteilung erhalten wir

$$\phi_\lambda(t) = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^\infty\frac{(t\lambda)^j}{j!} = e^{\lambda(t-1)},$$

für alle $t>0$.

Die Vorlesungen vom 04.12. findet ersatzweise am 05.12. zum Übungstermin statt.
Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.

Für die negative Binomialverteilung können wir entweder direkt mit Hilfe des verallgemeinerten binomischen Lehrsatzes rechnen, oder wir nutzen Aufgabe 6.3. Sei dazu N negativ binomialverteilt und $\beta = p/(1-p)$. Dann ist N die Mischung aus einer Poissonverteilung mit einer $\Gamma(\alpha, \beta)$-Verteilung. Sei Λ der gammaverteilte Mischungsparameter, dann gilt mit (b), da N bedingt auf Λ poissonverteilt ist,

$$\phi^-_{\alpha,p}(t) = \mathbb{E}[t^N] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[t^N \mid \Lambda]\Big] = \mathbb{E}[e^{\Lambda(t-1)}] = \psi_\Lambda(t-1). \tag{1}$$

Wir sind also fertig, sobald wir die momenterzeugenden Funktion von Λ kennen. Dazu

$$\psi_\Lambda(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{\lambda(t-\beta)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda.$$

Dieses Integral existiert immer genau dann, wenn $t < \beta$. Mit der Substitution $x/(\beta - t) = \lambda$ ergibt sich

$$\psi_\Lambda(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^\alpha} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} d\lambda}_{=\Gamma(\alpha)} = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha.$$

Damit wir (1) nutzen können, muss also $t - 1 < \beta$ gelten, was nach Definition von β äquivalent zu $t < 1/(1-p)$ ist. Für diese t gilt dann, wieder mit der Definition von β, dass

$$\phi^-_{\alpha,p}(t) = \left(\frac{p}{1 - t(1-p)}\right)^\alpha.$$

Zum Abschluss bemerken wir noch, dass (1) unabhängig von der Verteilung des Mischungsparameters ist und eine allgemeine Formel für gemischte Poissonverteilungen liefert.

Zu (b): Nach (a) haben alle drei Erzeugendenfunktionen die Form $a(t)^\gamma$, wobei γ der entsprechende Parameter der Verteilung ist. Für zwei Unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit entsprechenden Parametern γ_X und γ_Y gilt

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = a(t)^{\gamma_X} a(t)^{\gamma_Y} = a(t)^{\gamma_X + \gamma_Y}$$

und daraus folgt dann jeweils die Behauptung, wenn $a(t)$ entsprechend der Verteilung gewählt wird, da die Erzeugendenfunktion die Verteilung eindeutig bestimmt. □

Die Vorlesungen vom 04.12. findet ersatzweise am 05.12. zum Übungstermin statt.
Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.