Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1. Finden Sie eine Verteilungsfunktion, für die für alle $\lambda > 0$ einerseits

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = 0$$

und andererseits

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\lambda x}} = \infty$$

gilt.

Aufgabe 6.2. Zeigen Sie, dass die Pareto-Verteilung heavy-tailed ist. Zeigen Sie weiter, dass die Weibull-Verteilung genau dann heavy-tailed ist, wenn $\alpha < 1$.
Hinweis: Die Verteilungen finden Sie z.B. in Tabelle II.1 im Skript.

Aufgabe 6.3.

(a) Sei N negativ binomial verteilt mit Parametern $\alpha > 0$ und $p = \beta/(\beta+1)$ für eine $\beta > 0$. D.h.

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{\alpha+n-1}{n} p^\alpha (1-p)^n,$$

wobei $\binom{\alpha+k-1}{k} := \Gamma(\alpha+k)/(k!\Gamma(\alpha))$. Zeigen Sie, dass N gemischt Poisson verteilt ist, mit $\Gamma(\alpha,\beta)$ verteiltem Mischungsparameter.

(b) Sei nun N gemischt Poisson verteilt mit Pareto $P(\kappa,\alpha)$ verteiltem Mischungsparameter. Sei $f_{\kappa,\alpha}(x) = \frac{\alpha\kappa^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(x)$, die Dichte der Pareto-Verteilung. Zeigen Sie,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(N=n)}{f_{\kappa,\alpha}(n)} = 1$$

Hinweis: Für die Gamma-Funktion gilt sowohl $\Gamma(n) = (n-1)!$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, als auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} x^{-a} = 1$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.4.

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen der Binomial-, $\mathrm{Bin}(n,p)$, der Poisson-, $\mathrm{Pois}(\lambda)$, und der negativen Binomialverteilung, $\mathrm{Bin}^-(\alpha,p)$

(b) Zeigen Sie, dass diese Verteilungen faltungsstabil sind, d.h.

(i) $\mathrm{Bin}(n_1,p) \star \mathrm{Bin}(n_2,p) = \mathrm{Bin}(n_1+n_2,p)$,

(ii) $\mathrm{Pois}(\lambda_1) \star \mathrm{Pois}(\lambda_2) = \mathrm{Pois}(\lambda_1+\lambda_2)$,

(iii) $\mathrm{Bin}^-(\alpha_1,p) \star \mathrm{Bin}^-(\alpha_2,p) = \mathrm{Bin}^-(\alpha_1+\alpha_2,p)$.

Die Vorlesungen vom 04.12. findet ersatzweise am 05.12. zum Übungstermin statt.
Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.