Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1. Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass genau dann $\lim_{t\uparrow\tau}\Lambda_Y(t)=\infty$ gilt, wenn entweder $\tau=\infty$ oder sowohl $\tau<\infty$ als auch $F(\tau-)=1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass aus $F(\tau-)<1$ direkt $\Lambda(\tau-)<\infty$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass, falls $F(\tau-)=1$, es ein Folge $(t_n : n\in\mathbb{N})$ gibt, so dass $\Lambda(t_n)-\Lambda(t_{n-1})\geq 1/2$ gilt.

(c) Schließen Sie damit die Behauptung.

Beweis.
Zu (a): Da F monoton ist, folgt aus $F(\tau-)<1$ und der Monotonie des Integrals direkt

$$\lim_{t\uparrow\tau}\int\limits_{[0,t]}\frac{dF(s)}{1-F(s-)}\leq\frac{1}{1-F(\tau-)}\lim_{t\uparrow\tau}\mathbb{P}(T\leq t)<\infty.$$

Zu (b): Wir bemerken zuerst, dass wieder aus der Monotonie von F für jedes $t_n>t_{n-1}\geq 0$ gilt

$$\Lambda(t_n)-\Lambda(t_{n-1})=\int\limits_{(t_{n-1},t_n]}\frac{dF(s)}{1-F(s-)}\geq\frac{F(t_n)-F(t_{n-1})}{1-F(t_{n-1})}.$$

Damit also $\Lambda(t_n)-\Lambda(t_{n-1})\geq 1/2$ gilt, reicht es eine Folge zu finden, die

$$F(t_n)\geq\frac{1+F(t_{n-1})}{2}=1-\frac{1-F(t_{n-1})}{2}\tag{1}$$

erfüllt. Diese Konstruieren wir nun. Dazu bemerken wir zunächst, dass es, wegen $F(\tau-)=1$, für jedes $\varepsilon\in(0,1)$ gilt

$$T_\varepsilon:=\inf\{t:F(t)\geq 1-\varepsilon\}<\tau.\tag{2}$$

Insbesondere folgt aus der Rechtsstetigkeit auch $F(T_\varepsilon)\geq 1/2$. Wir setzen nun $t_0=0$ und $\varepsilon_1=1/2$. Mit (2) wählen wir also $0<t_1=T_{\varepsilon_1}<\tau$. Offenbar erfüllen t_0 und t_1 Ungleichung (1). Nehmen wir nun an, dass die Folgenglieder bis t_{n-1} schon konstruiert sind. Wir wählen $\varepsilon_n=(1-F(t_{n-1}))/2\in(0,1)$ und wählen $t_n=T_{\varepsilon_n}$. Mit (2) folgt dann

$$F(t_n)\geq 1-\varepsilon_n=1-\frac{1-F(t_{n-1})}{2}$$

und damit ist (1) erfüllt. Wir bemerken, dass $t_n>t_{n-1}$ sein muss, da (1) ansonsten $F(t_{n-1})=1$ implizierte, was ein Widerspruch zu $\varepsilon_n>0$ ist. Außerdem ist offensichtlich $t_n<\tau$, da $F(t_n)<1$. Damit erfüllt t_n alle gewünschten Eigenschaften und induktiv ist die gewünschte Folge konstruiert.

Am 28.11. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 04.12. findet ersatzweise am 05.12. zum Übungstermin statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.

Zu (c): Wir bemerken zuerst, dass $\tau = \infty$ direkt $F(\tau-) = 1$ impliziert. Damit folgt aus (a) die Hinrichtung. Für die Rückrichtung nehmen wir die Folge aus (b) und erhalten für alle n mit $\Lambda(t_0) = \Lambda(0) = 0$

$$\Lambda(t_n) = \sum_{k=1}^{n} (\Lambda(t_k) - \Lambda(t_{k-1})) \geq \frac{n}{2}$$

und damit $\limsup \Lambda(t) = \infty$). Und da Λ monoton wächst, folgt damit auch dieselbe Aussage für den Limes. □

Aufgabe 5.2. Wir betrachten eine reine Todesfallversicherung, d.h. $A(\tau) = 0$, und nehmen an, dass A, K und T stetig differenzierbar sind. In diesem Fall können wir, wie in Aufgabe 3.5, die natürliche Prämie über die Dichte $\pi^{\mathrm{nat}}(t) = A(t)\lambda(t)$ definieren. Berechnen Sie die Varianz des Barwerts und vergleichen Sie diese mit der Varianz der Nettoeinmalprämie.

Beweis. Siehe Beispiel 3.33 im Skript. □

Aufgabe 5.3. Der erste Zug des Tages aus Werneuchen nach Berlin kommt jeden Tag unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ zu spät. Eine Reisende auf dieser Bahnlinie schließt an einem Sonntag eine Versicherung mit der folgenden Leistung ab: Falls der oben genannte Zug am n-ten Tag nach der Vertragsunterzeichnung zum ersten Mal zu spät kommt, bekommt der Reisende 2^{-n} Euro vom Versicherungsunternehmen und danach keine Leistung mehr. Wegen der höchstwahrscheinlich kurzer Versicherungsperiode sei die Kapitalfunktion durch $K(t) = 1$ gegeben.

(a) Stellen Sie das zugehörige Lebensversicherungsmodell auf.

(b) Berechnen Sie das Minimum der Varianz des Barwertes unter allen möglichen Nettoprämien im Fall dieser Versicherung.

(c) Berechnen Sie außerdem die Varianz des Barwerts der natürlichen Prämie und vergleichen Sie diese mit dem Minimum aus Teil (a).

Beweis.
Zu (a): Wir betrachten einen Lebensversicherungsvertrag in diskreter Zeit $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau = \infty$, $K \equiv 1$, $A(n) = 2^{-n}$ sowie geometrisch verteilter Restlebensdauer T mit Parameter $p = 1/5$.
Zu (b): Offenbar ist $A(n)/K(n) = A(n)$ monoton fallend. Daher wird nach Proposition 3.1 die Varianz des Barwerts von der Nettoeinmalprämie minimiert. Für diese gilt zunächst

$$\tilde{\Pi} = \mathbb{E}A(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{5}\right)^n = \tfrac{1}{6}.$$

Damit folgt für die Varianz der Nettoprämie und damit auch für die minimale Varianz

$$\mathrm{Var}(B) = \mathrm{Var}(A(Y)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \tfrac{1}{5} \right) - \tfrac{1}{36} = \tfrac{5}{144}.$$

Am 28.11. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 04.12. findet ersatzweise am 05.12. zum Übungstermin statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.

Zu (c): Berechnen wir zunächst die einzelnen Prämie der natürlichen Prämie. Mit Präposition 2.28 gilt

$$\pi_k = \tfrac{1}{\mathbb{P}(T>k)} 2^{-k-1}\mathbb{P}(T = k+1) = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1}$$

und damit

$$\Pi(n) = \tfrac{1}{5}\sum_{k=0}^{n} 2^{-k-1} = \tfrac{1-2^{-k-1}}{5}.$$

Nach dem Satz von Hattendorf gilt dann für die Varianz des Barwerts

$$\mathrm{Var}(B) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n} - V(n)\right)^2 (1-\Delta\Lambda(n))\mathbb{P}(T = n)$$

vorausgesetzt, dass die Partialsummen bis zu jedem $m \in \mathbb{N}$ endlich sind. Wir berechnen zunächst das Nettodeckungskapital. Entweder wir berechnen direkt mit Lemma 2.34 oder wir erinnern uns daran, dass die natürliche Prämie eine Summe von Nettoeinmalzuahlungen (je zum Anfang des nächsten Intervalls) ist. Dann muss aber nach Definition der Nettoeinmalzahlung und der Linearität des Erwartungswert gelten, $V(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ (Vergleiche hierzu auch das stetige Analog aus den Übungsaufgabe 3.5 bzw. 5.2). Weiter gilt

$$\Lambda(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{P}(T = k)}{\mathbb{P}(T > k-1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(4/5)^{k-1}(1/5)}{(4/5)^{k-1}} = \frac{n}{5}$$

und damit

$$1 - \Delta\Lambda(n) = 1 - \Lambda(n) + \Lambda(n-1) = \tfrac{4}{5}.$$

Zusammengefasst existiert also die Varianz des Barwerts bezüglich der natürlichen Prämie und es gilt

$$\mathrm{Var}(B) = \tfrac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1}\tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{20}.$$

Insgesamt ist die Varianz bezüglich der natürlichen Prämie wie erwartet größer als die bzgl. der Nettoeinmalprämie. □

Aufgabe 5.4. Sei $(N_t : t \geq 0)$ der Zählprozess mit genau einem Sprung zur Zeit T, wobei $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(T = 2) = 1/2$. Finden Sie den Kompensator von N_t.

Beweis. Nach Proposition 3.18 ist der Kompensator gegeben durch $\Lambda_Y(Y \wedge t)$. Da im Fall hier Y und T offenbar übereinstimmen, erhalten wir mit

$$F = 2^{-1}\mathbb{1}_{[1,\infty)} + 2^{-1}\mathbb{1}_{[2,\infty)}$$

daher

$$\begin{aligned}\Lambda(T\wedge t) &= \int_{[0,T\wedge t]}\frac{dF(u)}{\bar{F}(u-)} = \mathbb{1}_{[1,\infty)}(T\wedge t)\frac{1}{2\bar{F}(1-)} + \mathbb{1}_{[2,\infty)}(T\wedge t)\frac{1}{2\bar{F}(2-)}\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(T\wedge t) + \mathbb{1}_{[2,\infty)}(T\wedge t).\end{aligned}$$

□

Am 28.11. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen vom 04.12. findet ersatzweise am 05.12. zum Übungstermin statt. Die Vorlesungen vom 20.12. findet ersatzweise am 19.12. zum Übungstermin statt.