Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass Proposition 3.1 durch Weglassen der Voraussetzung an das Auszahlungsspektrum falsch wird.
Hinweis: Betrachten Sie z.B. eine reine Erlebensfallversicherung mit konstanter Kapitalfunktion.

Beweis. Wir betrachten für $\tau = 1$ das Auszahlungsspektrum $A(t) = \mathbb{1}_{t=1}$ und betrachten die Kapitalfunktion $K(t) = 1$. Mit der Notation aus dem Beweis in der Vorlesung gilt dann $\bar{A}(t) = A(t)$ für alle $t \leq 1$. Sei ferner F stetig, dann ist $A(Y) = \mathbb{1}_{\{Y=1\}}$ Bernoulli verteilt mit Parameter

$$p = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(T \geq 1) = \bar{F}(1)$$

und damit insbesondere $\mathbb{E}A(Y) = \bar{F}(1)$. Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir nach der Rechnung in der Vorlesung eine Nettoprämie finden, für die gilt

$$\operatorname{Var}(\bar{\Pi}(Y)) - 2\operatorname{Cov}(A(Y), \bar{\Pi}(Y)) < 0.$$

Zunächst bemerken wir, da Π eine Nettoprämie ist, dass damit $\mathbb{E}\bar{\Pi}(Y) = \mathbb{E}A(Y) = \bar{F}(1)$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\operatorname{Var}(\bar{\Pi}(Y)) - 2\operatorname{Cov}(A(Y), \bar{\Pi}(Y)) \\ &\qquad = \mathbb{E}[\bar{\Pi}(Y)^2] - \bar{F}(1)^2 - 2\Big[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y=1\}}\bar{\Pi}(Y)] - \bar{F}(1)^2\Big] \\ &\qquad = \mathbb{E}[\bar{\Pi}(Y)^2] + \bar{F}(1)^2 - 2\bar{\Pi}(1)\bar{F}(1). \end{aligned}$$

Wir erinnern uns nun daran, dass nach Definition von $\bar{\Pi}$ aus der Vorlesung und der Wahl von K gilt,

$$\bar{\Pi}(t) = \int_{[0,t)} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s) = \int_{[0,t)} d\Pi(s), \qquad \text{für alle } t \leq 1.$$

Wir wollen nun ein möglichst einfaches Π wählen, um die Rechnungen einfach zu halten. Wir betrachten eine einzige Zahlung zum Zeitpunkt $1/2$, also $\Pi(t) = \pi\mathbb{1}_{[1/2,\infty)}(t)$. Die Idee ist, dass wir durch die einmalige Zahlung zu einem Zeitpunkt später als Null positive Informationen über das Überleben bis zum Ende erhalten. Insbesondere folgt damit $\bar{\Pi}(t) = \pi\mathbb{1}_{(1/2,\infty)}(t)$. Zudem muss gelten, um eine Nettoprämie zu sein,

$$\bar{F}(1) = \mathbb{E}A(Y) = \mathbb{E}\bar{\Pi}(Y) = \pi\mathbb{P}(Y > 1/2) = \pi\bar{F}(1/2) \iff \pi = \frac{\bar{F}(1)}{\bar{F}(1/2)}.$$

Schrieben wir $\bar{F}(1)/\bar{F}(1/2) = \mathbb{P}(T > 1 \mid T > 1/2)$, dann sehen wir die angesprochenen positiven Informationen aufs Überleben in der Bedingung. Offensichtlich gilt nämlich $\mathbb{P}(T > 1 \mid T > 1/2) > \mathbb{P}(T > 1) = \tilde{\Pi}$ für die Nettoeinmalzahlung. Für das zweite Moment von $\bar{\Pi}(Y)$ berechnen wir also

$$\mathbb{E}[\bar{\Pi}(Y)^2] = \pi^2\bar{F}(1/2) = \frac{\bar{F}(1)^2}{\bar{F}(1/2)}.$$

Die Vorlesungen vom 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. 05.12. zum Übungstermin statt.

Setzen wir alles zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\bar{\Pi}(Y)) - 2\operatorname{Cov}(A(Y), \bar{\Pi}(Y)) &= \frac{\bar{F}(1)^2}{\bar{F}(1/2)} + \bar{F}(1)^2 - 2\frac{\bar{F}(1)^2}{\bar{F}(1/2)}\\ &= \frac{\bar{F}(1)^2}{\bar{F}(1/2)}\Big(1 + \bar{F}(1/2) - 2\Big)\\ &< 0,\end{aligned}$$

da $\bar{F}(1/2) < 1$. $\square$

Aufgabe 4.2. Beweisen Sie Lemma 3.14 aus der Vorlesung. D.h., zeigen Sie, dass für ein Martingal $(M_t : t \geq 0)$ mit $\mathbb{E}M_t^2 < \infty$ für alle $t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2], \qquad 0 \leq s < t.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] &= \mathbb{E}M_t^2 - 2\mathbb{E}[M_t M_s] + \mathbb{E}M_s^2\\ &= \mathbb{E}M_t^2 - 2\mathbb{E}[M_s\,\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]] + \mathbb{E}M_s^2\\ &= EM_t^2 - \mathbb{E}M_s^2,\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt bekanntes rausziehen und im letzten Schritt die Martingaleigenschaft benutzt haben. $\square$

Aufgabe 4.3.

(a) Beweisen Sie die Faltungsformel für Zufallsvariablen mit Dichte. D.h., zeigen Sie, dass für zwei unabhängige, absolut stetige Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f und g, die Summe $Z = X + Y$ absolut stetig ist mit Dichte

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y - x)\,dx.$$

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $S_n := \sum_1^n X_i$ Gammaverteilt ist mit Parametern n und λ. D.h., S_n ist absolut steig mit Dichte

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Beweis. Zu (a): Wir nutzen die Unabhängigkeit von X und Y und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq z) &= \int\limits_{\{(x,y):x+y\leq z\}} f(x)g(y)\,dy\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \int\limits_{-\infty}^{z-x} g(y)\,dy\,dx\\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \int\limits_{-\infty}^{z} g(u-x)\,du\,dx = \int\limits_{-\infty}^{z} \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(u-x)\,dx\Big)du\\ &= \int\limits_{-\infty}^{z} h(u)\,du,\end{aligned}$$

Die Vorlesungen vom 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. 05.12. zum Übungstermin statt.

wobei wir im dritten Schritt die Substitution $u = y + x$ und im vierten Schritt Fubini benutzt haben. Damit folgt die Behauptung.

Zu (b): Wir beweisen die Aussage über Induktion. Für $n = 1$ gilt offensichtlich $S_1 = X_1$ und hat damit die Dichte der Exponentialverteilung also $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = f_1(x)$. Habe nun S_n die Dichte f_n für ein beliebiges, aber festes n, dann gilt mit der Faltungsformel aus (a) und unter der Berücksichtigung, dass f nur für positive x positiv ist,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) f(y-x)\, dx = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^y x^{n-1} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(y-x)}\, dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} \int_0^y x^{n-1}\, dx = f_{n+1}(y). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4.4. Wir betrachten das folgende Spiel. Nach jeweils einer unabhängigen exponentialverteilter Wartezeit wird eine faire Münze geworfen. Zeigt die Münze „Kopf“, dann erhalten wir einen Euro, bei „Zahl“ bezahlen wir einen Euro. Seien dazu $Y_1, Y_2, \dots$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2$$

und $T_1, T_2, \dots$ eine Folge unabhängiger, exponential(λ) verteilter Zufallsvariablen, wobei T_i die Wartezeit die Wartezeit zwischen dem $(i-1)$-ten und dem i-ten Münzwurf angibt. Sei ferner

$$\eta(t) := \max\left\{ n : S_n = \sum_{j=1}^{n} T_j \leq t \right\}$$

die Anzahl an Münzwürfen bis zum Zeitpunkt t. Bei einem Startguthaben von $k \in \mathbb{N}$ Euro ist der Prozess unseres Gewinnes also beschrieben durch

$$X_t = k + \sum_{j=1}^{\eta(t)} Y_j, \quad t \geq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\eta(t)$ Poisson verteilt ist mit Parameter λt für jedes $t \geq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass X_t integrierbar ist und bestimmen Sie den Erwartungswert.

(c) Zeigen Sie, dass $(X_t : t \geq 0)$ ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration von $(X_t : t \geq 0)$ ist.

Betrachten wir nun auch noch den Sprungprozess Z_t, der zählt, wie viele Münzwürfe wir bis zum Zeitpunkt t gewonnen haben. D.h.,

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\eta(t)} \mathbb{1}_{\{Y_j = 1\}}$$

Die Vorlesungen vom 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. 05.12. zum Übungstermin statt.

(d) Zeigen Sie, dass die beiden Prozesse $\eta(t)$ und Z_t positiv korreliert sind.

(e) Finden Sie den Kompensator von Z_t, also einen stochastischen Prozess W_t, so dass $Z_t - W_t$ ein Martingal ist.

Bemerkung: Den Prozess X_t nennt man auch einfache, symmetrische Irrfahrt in stetiger Zeit. Der Prozess $\eta(t)$ heißt auch *Poisson Prozess* und wird später noch wichtig.

Beweis. Zu (a): Wir müssen zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $t > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(\eta(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Dazu nutzen wir, dass S_n nach Aufgabe 4.4 Gammaverteilt ist. Damit gilt, wegen der Unabhängigkeit von T_{n+1} und S_n

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\eta(t) = n) &= \mathbb{P}(S_n \le t, S_{n+1} > t) = \mathbb{P}(S_n \le t, T_{n+1} > t - S_n) \\
&= \int_0^t f_n(s)\, \mathbb{P}(T_{n+1} > t - s)\, ds = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1} e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}\, ds \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t s^{n-1}\, ds = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst die Integrierbarkeit und betrachten für $t > 0$ mit (a) und der Unabhängigkeit der Y_i von den T_i und damit $\eta(t)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t| &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[|X_t| \mid \eta(t) = n] \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\Big|k + \sum_{j=1}^{n} Y_j\Big|\Big] \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&\le e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (k+n) \frac{(\lambda t)^n}{n!} < \infty.
\end{aligned}$$

Mit fast derselben Rechnung erhalten wir außerdem

$$\mathbb{E}X_t = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big[k + \sum_{j=1}^{n} Y_j\Big] \frac{(\lambda t)^n}{n!} = k\, \underbrace{e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}_{=1} + e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[Y_j]}_{=0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = k.$$

Zu (c): Die Adaption an die kanonische σ-Algebra ist klar, die Integrierbarkeit folgt aus (b), daher bleibt die Martingaleigenschaft zu zeigen. Für $s < t$ gilt

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s + \mathbb{E}\Big[\sum_{j=\eta(s)+1}^{\eta(t)} Y_j\Big] = X_s + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\eta(t) - \eta(s) = n) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}Y_j = X_s,$$

wobei wir bekanntes Rausziehen, die Unabhängigkeit und Gleichverteilung der Y_j untereinander, sowie die Unabhängigkeit zu η benutzt haben.

Die Vorlesungen vom 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. 05.12. zum Übungstermin statt.

Zu (d): Wir Schreiben $U_j = \mathbb{1}_{\{Y_j=1\}}$, so dass $Z_t = \sum_{j=1}^{\eta(t)} U_j$. Dann bilden die U_j eine von η unabhängige (zufällige) Folge mit Werten in $\{0,1\}$. Sei nun für eine gegebene $0-1$–Folge $u = u_1, u_2, \dots$ die Funktion $g_u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$g_u(n) := \sum_{j=1}^{n} u_j.$$

Dann gilt mit der Turmeigenschaft

$$\mathbb{E}[\eta(t)Z_t] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[\eta(t)g_U(\eta(t)) \mid \sigma(U)]\Big],$$

wobei $U = (U_1, U_2, \dots)$ und $\sigma(U)$ die davon erzeugte σ-Algebra ist. Nun sind offenbar die Identität $x \mapsto x$ und für gegebenes U die Funktion $g_U(x)$ wachsend in x. Mit derselben Rechnung wie in Lemma 3.3 in der Vorlesung angewendet auf die bedingten Erwartungswerte folgt also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\eta(t)g_U(\eta(t)) \mid \sigma(U)] &\geq \mathbb{E}[\eta(t) \mid \sigma(U)]\mathbb{E}[g_U(\eta(t)) \mid \sigma(U)] \\ &= \mathbb{E}[\eta(t)]\mathbb{E}[g_U(\eta(t)) \mid \sigma(U)],\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Unabhängigkeit von $\eta(t)$ und U folgt. Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}[\eta(t)Z_t] \geq \mathbb{E}[\eta(t)]\mathbb{E}[\mathbb{E}[g_U(\eta(t)) \mid \sigma(U)]] = \mathbb{E}[\eta(t)]\mathbb{E}[Z_t]$$

und somit die Behauptung.

Zu (e): Wir bemerken zunächst, dass Z_t an $\mathcal{F}_t$, die kanonische σ-Algebra von X_t, adaptiert ist. Außerdem wissen wir, aus (c), dass X_t ein Martingal ist. Da außerdem gilt

$$X_t = Z_t - \sum_{j=1}^{\eta(t)} \mathbb{1}_{\{Y_j=-1\}} = Z_t - \sum_{j=1}^{\eta(t)} (1 - U_j)$$

also ist $W_t = \sum_{j=1}^{\eta(t)}(1 - U_j)$ der gesuchte Kompensator. $\square$

Die Vorlesungen vom 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. 05.12. zum Übungstermin statt.