Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass Proposition 3.1 durch Weglassen der Voraussetzung an das Auszahlungsspektrum falsch wird.
Hinweis: Betrachten Sie z.B. eine reine Erlebensfallversicherung mit konstanter Kapitalfunktion.

Aufgabe 4.2. Beweisen Sie Lemma 3.14 aus der Vorlesung. D.h., zeigen Sie, dass für ein Martingal $(M_t : t \geq 0)$ mit $\mathbb{E}M_t^2 < \infty$ für alle $t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2], \qquad 0 \leq s < t.$$

Aufgabe 4.3.

(a) Beweisen Sie die Faltungsformel für Zufallsvariablen mit Dichte. D.h., zeigen Sie, dass für zwei unabhängige, absolut stetige Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f und g, die Summe $Z = X + Y$ absolut stetig ist mit Dichte

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)\,dx.$$

(b) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass $S_n := \sum_1^n X_i$ Gammaverteilt ist mit Parametern n und λ. D.h., S_n ist absolut steig mit Dichte

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Aufgabe 4.4. Wir betrachten das folgende Spiel. Nach jeweils einer unabhängigen exponentialverteilter Wartezeit wird eine faire Münze geworfen. Zeigt die Münze „Kopf“, dann erhalten wir einen Euro, bei „Zahl“ bezahlen wir einen Euro. Seien dazu $Y_1, Y_2, \dots$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1/2$$

und $T_1, T_2, \dots$ eine Folge unabhängiger, exponential(λ) verteilter Zufallsvariablen, wobei T_i die Wartezeit die Wartezeit zwischen dem $(i-1)$-ten und dem i-ten Münzwurf angibt. Sei ferner

$$\eta(t) := \max\left\{n : S_n = \sum_{j=1}^{n} T_j \leq t\right\}$$

die Anzahl an Münzwürfen bis zum Zeitpunkt t. Bei einem Startguthaben von $k \in \mathbb{N}$ Euro ist der Prozess unseres Gewinnes also beschrieben durch

$$X_t = k + \sum_{j=1}^{\eta(t)} Y_j, \quad t \geq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\eta(t)$ Poisson verteilt ist mit Parameter λt für jedes $t \geq 0$.

Die Vorlesungen vom 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. 05.12. zum Übungstermin statt.

(b) Zeigen Sie, dass X_t integrierbar ist und bestimmen Sie den Erwartungswert.

(c) Zeigen Sie, dass $(X_t : t \geq 0)$ ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration von $(X_t : t \geq 0)$ ist.

Betrachten wir nun auch noch den Sprungprozess Z_t, der zählt, wie viele Münzwürfe wir bis zum Zeitpunkt t gewonnen haben. D.h.,

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\eta(t)} \mathbb{1}_{\{Y_j=1\}}$$

(d) Zeigen Sie, dass die beiden Prozesse $\eta(t)$ und Z_t positiv korreliert sind.

(e) Finden Sie den Kompensator von Z_t, also einen stochastischen Prozess W_t, so dass $Z_t - W_t$ ein Martingal ist.

Bemerkung: Den Prozess X_t nennt man auch einfache, symmetrische Irrfahrt in stetiger Zeit. Der Prozess $\eta(t)$ heißt auch *Poisson Prozess* und wird später noch wichtig.

Die Vorlesungen vom 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. 05.12. zum Übungstermin statt.