Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1. Wir betrachten die Restlebensdauerverteilung

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\mu(x-1)} & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{für } x \geq 3, \end{cases}$$

in Abhängigkeit von einem Parameter $\mu > 0$. Berechnen Sie die kumulierte Sterblichkeitsrate

$$\Lambda(t) = \int_{[0,t]} \frac{dF(s)}{1 - F(s-)}, \quad t \in [0,3].$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \int_{[0,1)} \frac{1}{4-x} dx + \int_{[1,3)} (-\mu) dx + \frac{1}{1 - F(3-)} (F(3) - F(3-)) \\ &= \log(4/3) - 2\mu + 1. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.2. Wir betrachten eine reine Todesfallversicherung mit konstanter Auszahlung A bei stetiger Verzinsung $\delta \geq 0$. D.h., $\tau = \infty$, $A(t) = A$ und $K(t) = e^{\delta t}$. Bestimmen Sie die Nettoeinmalprämie $\tilde{\Pi}$ für den Fall, dass die Restlebensdauer exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist. Interpretieren Sie die Abhängigkeit von den Parametern λ und δ.

Beweis. Aus der Vorlesung wissen wir, da $Y = T$ für $\tau = \infty$, dass $\tilde{\Pi} = A\mathbb{E}[e^{-\delta T}]$. Für die Laplace-Transformierte von T erhalten wir für jedes $\delta \geq 0$,

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \delta},$$

womit $\tilde{\Pi} = A\lambda/(\lambda + \delta)$. □

Aufgabe 3.3. Wir betrachten die *laufende konstante vorschüssige Prämie*

$$\Pi(t) = \pi \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{1}_{[t_k, \infty)}(t).$$

Zeigen Sie, dass man π immer so wählen kann, dass Π ein Nettoprämienstrom ist und leiten Sie eine Formel für π.

Beweis. Da Π ein Nettoprämienstrom sein soll, muss nach dem Äquivalenzprinzip und Lemma 2.18 gelten

$$\int_{[0,\tau)} \frac{\bar{F}(s)}{K(s)} d\Pi(s) = \int_{[0,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)} \bar{F}(\tau-) = \mathbb{E}\Big[\frac{A(Y)}{K(Y)}\Big].$$

Am Donnerstag 14.11. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen am 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. am 05.12. zum Übungstermin statt.

Aufgrund von der Form von Π gilt

$$\int_{[0,\tau)} \frac{\bar{F}(s)}{K(s)} d\Pi(s) = \pi \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\bar{F}(t_k)}{K(t_k)}.$$

Dies ist insbesondere endlich und damit

$$\pi = \frac{\mathbb{E}\Big[A(Y)/K(Y)\Big]}{\sum_{j=1}^{N-1} \bar{F}(t_k)/K(t_k)}.$$

□

Aufgabe 3.4. Wir betrachten wie in Aufgabe 3.2 eine reine Todesfallversicherung mit konstanter Auszahlung $A(t) = A$. Wir nehmen nun an, dass für den stetige Zinssatz $\delta = 0$ also $K(t) = 1$ gilt. Weiter sei die Restlebensdauer nun uniform auf $[0, 100]$ verteilt. Bestimmen Sie für die stetige konstante Prämie $\Pi(t) = \pi t$ zunächst die Rate π so, dass Π ein Nettoprämienstrom ist und lösen Sie dann die Thielsche Differenzialgleichung.

Beweis. Wieder haben wir mit Lemma 2.18 und der Form von F und Π

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0,\infty)} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) - \int_{[0,\infty)} \frac{\bar{F}(s)}{K(s)} d\Pi(s) \\ &= \int_0^{100} \frac{A}{100} ds - \pi \mathbb{E}T \\ &= A - 50\pi, \end{aligned}$$

also $\pi = A/50$. Um die Thielsche Dgl zu lösen, bemerken wir zunächst, dass für die Zinsintensität gilt $\phi(t) = 0$. Für die Sterbeintensität erhalten wir

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{1}{100 - t}.$$

Damit lautet für $t < 100 = t_{\max}$ die Thielsche Dgl hat die Randbedingung $V(0) = 0$ und erfüllt

$$V'(t) = \frac{V(t)}{100 - t} + \frac{At}{50} - \frac{A}{100 - t} = V(t)h(t) + g(t)h(t), \tag{1}$$

wobei

$$h(t) = \frac{1}{100 - t} \text{ und damit } H(t) = \log(h(t)) \text{ sowie } h'(t) = h(t)^2$$

und

$$g(t) = \frac{A}{50}(-t^2 + 100t - 50).$$

Wir lösen zuerst die vereinfachte DGL und

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = h(t) \Rightarrow V(t) = Ce^{H(t)} = Ch(t).$$

Am Donnerstag 14.11. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen am 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. am 05.12. zum Übungstermin statt.

Wir substituieren $V(t) = C(t)h(t)$ in (1) und erhalten $C'(t) = g(t)$ und damit

$$\begin{aligned} C(t) &= c + \tfrac{A}{50}\int_0^t (-s^2 + 100s - 50)ds \\ &= c - \frac{A}{50}(-t^3 + 150t^2 - 150t). \end{aligned}$$

Wir wählen $c = 0$ und erhalten

$$V(t) = C(t)h(t) = \frac{A}{150}\frac{-t^3 + 150t^2 - 150t}{100 - t},$$

wobei die Wahl von $c = 0$ liefert, $V(t) = 0$ wie gefordert. □

Aufgabe 3.5. Wir betrachten eine temporäre Todesfallversicherung, d.h. $\tau < \infty$ und $A(\tau) = 0$. Wir nehmen zusätzlich an, dass A, K und Π stetig differenzierbar sind. In diesem Fall können wir analog zum diskreten Beispiel eine *stetige natürliche Prämie* definieren. Dazu sei

$$\pi^{\mathrm{nat}}(t) = \lambda(t)A(t), \qquad t \le \tau.$$

Bestimmen Sie in diesem Fall die Spar- und Risikokomponente.

Beweis. Wir berechnen zuerst, das Deckungskapital, wofür mit Lemma 2.34, der Stetigkeit von F und Π, sowie $A(\tau) = 0$ gilt,

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{K(t)}{\bar F(t)}\Big(\int_{(t,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)}dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)}\bar F(\tau-) - \int_{[t,\tau)} \frac{\bar F(s)}{K(s)}d\Pi(s)\Big) \\ &= \frac{K(t)}{\bar F(t)}\Big(\int_{(t,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)}f(s)ds + 0 - \int_{[t,\tau)} \frac{\bar F(s)}{K(s)}\pi^{\mathrm{nat}}(s)ds\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt dabei aus der Definition $\pi^{\mathrm{nat}}(s) = \lambda(s)A(s) = f(s)A(s)/\bar F(s)$. Es gilt also $V(t) = 0$ für alle $t \le \tau$ und damit insbesondere auch $V'(t) = 0$. Damit gilt für die Spar- und Risikokomponente

$$\pi^s(t) = V'(t) - \phi(t)V(t) = 0 \quad \text{und} \quad \pi^r(t) = (A(t) - V(t))\lambda(t) = \pi^{\mathrm{nat}}(t).$$

□

Am Donnerstag 14.11. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen am 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. am 05.12. zum Übungstermin statt.