Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1. Wir betrachten die Restlebensdauerverteilung

$$F(x) := \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\mu(x-1)} & \text{für } 1 \le x < 3, \\ 1 & \text{für } x \ge 3, \end{cases}$$

in Abhängigkeit von einem Parameter $\mu > 0$. Berechnen Sie die kumulierte Sterblichkeitsrate

$$\Lambda(t) = \int_{[0,t]} \frac{dF(s)}{1 - F(s-)}, \quad t \in [0,3].$$

Aufgabe 3.2. Wir betrachten eine reine Todesfallversicherung mit konstanter Auszahlung A bei stetiger Verzinsung $\delta \ge 0$. D.h., $\tau = \infty$, $A(t) = A$ und $K(t) = e^{\delta t}$. Bestimmen Sie die Nettoeinmalprämie $\tilde{\Pi}$ für den Fall, dass die Restlebensdauer exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist. Interpretieren Sie die Abhängigkeit von den Parametern λ und δ.

Aufgabe 3.3. Wir betrachten die *laufende konstante vorschüssige Prämie*

$$\Pi(t) = \pi \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{1}_{[t_k,\infty)}(t).$$

Zeigen Sie, dass man π immer so wählen kann, dass Π ein Nettoprämienstrom ist und leiten Sie eine Formel für π.

Aufgabe 3.4. Wir betrachten wie in Aufgabe 3.2 eine reine Todesfallversicherung mit konstanter Auszahlung $A(t) = A$. Wir nehmen nun an, dass für den stetige Zinssatz $\delta = 0$ also $K(t) = 1$ gilt. Weiter sei die Restlebensdauer nun uniform auf $[0, 100]$ verteilt. Bestimmen Sie für die stetige konstante Prämie $\Pi(t) = \pi t$ zunächst die Rate π so, dass Π ein Nettoprämienstrom ist und lösen Sie dann die Thielsche Differenzialgleichung.

Aufgabe 3.5. Wir betrachten eine temporäre Todesfallversicherung, d.h. $\tau < \infty$ und $A(\tau) = 0$. Wir nehmen zusätzlich an, dass A, K und Π stetig differenzierbar sind. In diesem Fall können wir analog zum diskreten Beispiel eine *stetige natürliche Prämie* definieren. Dazu sei

$$\pi^{\text{nat}}(t) = \lambda(t)A(t), \qquad t \le \tau.$$

Bestimmen Sie in diesem Fall die Spar- und Risikokomponente.

Am Donnerstag 14.11. findet eine Übung statt. Die Vorlesungen am 20.11. und 04.12. findet ersatzweise am 21.11. bzw. am 05.12. zum Übungstermin statt.