Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtsstetige, monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $a < b$ durch $\mu(a,b] := F(b) - F(a)$ ein eindeutiges Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ induziert wird.

Beweis. Sei $\mathcal{I}$ der von den halboffenen Intervallen $\{(a,b] : -\infty \leq a < b \leq \infty\}$ erzeugte Ring. D.h., $\mathcal{I}$ enthält alle diese Intervalle sowie *endliche* Vereinigungen dieser. Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}$, müssen wir zeigen, dass μ auf $\mathcal{I}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\mu(I) \geq 0$ für alle $I = (a,b]$,
- $\mu(\emptyset) = 0$ und
- $\mu\Big(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} I_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n)$ für jede abzählbare Folge disjunkter Intervalle.

Gelten diese Eigenschaften, dann definiert μ ein Prämaß, das nach Carathéodorys Fortsetzungssatz eindeutig auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden kann. Zunächst erweitern wir unsere Definition und setzen

$$\begin{aligned}\mu\Big((a_1,b_1] \cup (a_2,b_2] \cup \cdots \cup (a_n,b_n]\Big)\\ = (F(b_1) - F(a_1)) + (F(b_2) - F(a_2)) + \cdots + (F(b_n) - F(a_n))\end{aligned} \tag{1}$$

für disjunkte $(a_{1,1}], (a_2,b_2], \dots (a_n,b_n]$. Dies etabliert die endliche Additivität von μ und ist konsistent mit unserer Forderung an μ. Da $I \in \mathcal{I}$ nun entweder ein Intervall oder eine endliche Vereinigung von Intervallen ist, folgt aus der Monotonie von F und (1) direkt $\mu(I) \geq 0$. Da $\emptyset = (a,a]$, folgt offensichtlich die zweite Eigenschaft. Es bleibt die σ-Additivität zu zeigen. Sei nun $I = \bigcup_n I_n \in \mathcal{I}$. Dann gilt einerseits, dass jedes I_n eine endliche Vereinigung von Intervallen ist und damit $I = \bigcup_n (a_n, b_n]$. Andererseits gilt auch $I \in \mathcal{I}$ und damit $I = (A_1, B_1] \cup \cdots \cup (A_m, b_m]$, wobei $(A_i, B_i] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n^{(i)}, b_n^{(i)}]$. Da aus der endlichen Additivität

$$\mu(I) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i, B_i]$$

folgt, reicht es zu zeigen, dass für jedes Interval der Form $(a,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n]$ gilt, $\mu(a,b] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n,b_n]$. Betrachte dafür zunächst für ein endliches $N \in \mathbb{N}$

$$(a,b] \supset \bigcup_{n=1}^{N} (a_n,b_n] \Longrightarrow \mu(a,b] = F(b) - F(a) \geq \sum_{n=1}^{N} F(b_n) - F(a_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(a_n,b_n].$$

Da $F(b) - F(a) < \infty$, können wir den Grenzwert $N \to \infty$ bilden und erhalten direkt

$$(a,b] \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n] \Longrightarrow \mu(a,b] \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n,b_n].$$

Umgekehrt betrachten wir nun den Fall

$$(a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a_n,b_n] \Longrightarrow \mu(a,b] \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(a_n,b_n].$$

Wähle nun $0 < \varepsilon < b - a$. Wegen der REchtsstetigkeit von F gibt es zu jedem b_n ein $b'_n > b_n$ mit $F(b'_n) - F(b_n) \leq \varepsilon 2^{-n}$. Dann gilt offenbar $[a+\varepsilon, b] \subset \bigcup_n (a_n, b'_n)$. D.h., die kompakte Menge $[a+\varepsilon, b]$ wird abzählbar durch die offenen Mengen (a_n, b'_n) überdeckt. Insbesondere überdecken damit endlich viele Intervalle $(a_{n_j}, b_{n_j}], j = 1, \ldots, N$ das kompakte Intervall $[a+\varepsilon, b]$. Es folgt mit der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} F(b) - F(a+\varepsilon) = \mu(a+\varepsilon, b] &\leq \sum_{j=1}^{N} \mu(a_{n_j}, b'_{n_j}] \leq \sum_{j=1}^{N} (\mu(a_{n_j}, b_{n_j}] + \varepsilon 2^{-n_j}) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n, b_n] + \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ und der Rechtsstetigkeit folgt also

$$(a, b] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_b, b_n] \Longrightarrow \mu(a, b] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(a_n, b_n]$$

und damit die σ-Additivität. □

Aufgabe 2.2. Seien Z_1 und Z_2 zwei gerichtete Zahlungsströme, für die $Z_1(t) \geq Z_2(t)$ für alle $t \geq 0$ gelte. Zeigen Sie, dass für alle monoton fallenden, messbaren Funktionen $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ und $t \geq 0$ gilt,

$$\int_{[0,t]} g(s) dZ_1(s) \geq \int_{[0,t]} g(s) dZ_2(s).$$

Folgern Sie, dass damit insbesondere für die Barwerte zu allen Zeiten $t \geq 0$ gilt, $b(Z_1)(t) \geq b(Z_2)(t)$.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass für jede monoton fallende Funktion g auch die verallgemeinerte Inverse g^{-1} existiert und diese ebenfalls monoton fallend ist. Es gilt also insbesondere $x \leq g(s) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \geq s$. Es folgt mit dem Satz von Fubini, wie auf Übungsblatt 1

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} g(s) dZ_1(s) &= \int_0^\infty \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{x \leq g(s)\}} dZ_1(s) dx = \int_0^\infty Z_1(g^{-1}(x) \wedge t) dx \\ &\geq \int_0^\infty Z_2(g^{-1}(x) \wedge t) dx = \int_{[0,t]} g(s) dZ_2(s). \end{aligned}$$

Die Behauptungen zu dem Barwerten folgt dann, da $g(s) := 1/K(s)$ eine fallende Funktion ist für jede Kapitalfunktion K. □

Aufgabe 2.3. Eine Kundin legt über n Jahre jährlich Betrag π bei einer Bank an, welche das angelegte Geld diskret mit Zinssatz $h \geq 0$ verzinst. Am Ende des n-ten Jahres hebt die Kundin das gesamte Geld ab. Formulieren Sie die zugehörigen Zahlungsströme Z_P und Z_L und berechnen Sie die Barwerte bezüglich der Kapitalfunktion $K(t) = (1+i)^{\lfloor t \rfloor}$. Bestimmen Sie ferner die Rendite von $Z = Z_p - Z_L$.

Beweis. Offenbar gilt $Z_P(t) = \pi(1 + \lfloor t \rfloor)$ für $t < n + 1$ und $Z_P(t) = \pi(n + 1)$ sonst. Außerdem $Z_L(t) = B\mathbb{1}_{[n+1,\infty)}(t)$ (wir interpretieren das Ende des n-ten Jahres als Start des $n + 1$-ten Jahres), wobei

$$B = \pi \sum_{j=0}^{n} \frac{(1 + h)^{n+1}}{(1 + h)^j} = \pi(1 + h) \sum_{j=0}^{n} (1 + h)^j = \pi \frac{(1 + h)^{n+2} - 1 - h}{h}.$$

Für den Barwert des Prämienstroms ergibt sich

$$b(Z_P) = \pi \sum_{j=0}^{n} (1 + i)^{-j} = \pi(1 + i) \frac{1 - (1 + i)^{-n-1}}{i}.$$

Für den Barwert des Leistungstroms erhalten wir

$$b(Z_L) = \frac{B}{(1 + i)^{n+1}} = \pi \frac{(1 + h)^{n+2} - 1 - h}{h(1 + i)^{n+1}}$$

Um die Rendite zu bestimmen, müssen wir i so wählen, dass die Barwerte übereinstimmen. Setzen wir gleich und lösen auf, sehen wir direkt, dass $i = h$ sein muss. □

Aufgabe 2.4.

(a) Sei F die Verteilungsfunktion der Restlebensdauer T_x, wobei wir annehmen, dass F absolut stetig ist, mit stetiger Dichte f. Zeigen Sie, dass $\bar{F}$, und damit F, eindeutig beschrieben wird durch

$$\bar{F}(t) = \exp\Big(- \int_0^t \lambda(s) \ ds \Big),$$

wobei $\lambda(s) = f(s)/\bar{F}(s)$ die Sterblichkeitsrate ist.

(b) Zur Modellierung der Restlebensdauer T_0 betrachtete de Moivres[1] die Sterblichkeitsrate

$$\lambda(t) = \frac{1}{t_{\max} - t}, \qquad t_{\max} > 0, t \in [0, t_{\max}]$$

und $\lambda(t) = 0$ für $t > t_{\max}$. Bestimmen Sie die Verteilung von T_0 zusammen mit Erwartungswert und Varianz.

Beweis. Zu (a): Da F die Dichte f hat und $\bar{F} = 1 - F$ hat $\bar{F}$ die Dichte $-f$. Da zusätzlich f Stetig ist, stimmt die Dichte mit der Ableitung überein und wir erhalten aus der Definition der Sterberate für alle $t \in (0, t_{\max})$

$$\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} = -\lambda(t) \quad \text{mit der Randbedingung } \bar{F}(0) = 1.$$

Offenbar wird diese lineare Differentialgleichung gelöst durch

$$\bar{F}(t) = \exp\Big(- \int_0^t \lambda(s) \ ds \Big).$$

[1]Abraham de Moivre 1667–1754

Zu (b): Nach (a) berechnen wir zunächst

$$-\int_0^t \frac{1}{t_{\max} - s} ds = \log \frac{t_{\max} - t}{t_{\max}}$$

und damit $\bar{F}(t) = \frac{t_{\max}-t}{t_{\max}}$. Also ist T_0 uniform verteilt auf $(0, t_{\max})$. □

Aufgabe 2.5. Anders als in Aufgabe 2.4, in der wir eine analytische Form für die Sterblichkeitsrate annehmen, kann diese in der Regel besser durch Sterbetafeln bestimmt werden. In Sterbetafeln werden von Statistik-Instituten die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten und andere Größen veröffentlicht. In dieser Aufgabe wollen wir eine Formel herleiten, wie wir aus diesen die Sterblichkeitsrate bestimmt werden kann. Dazu machen wir zwei vereinfachende Annahmen.

(A1) Wir nehmen an, dass $T_x = N_x + U_x$, wobei N_x eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist, die das Sterbejahr modelliert, und U_x davon unabhängig uniform auf $(0, 1)$ verteilt ist.

(A2) Wir nehmen an, dass $(T_x : x \geq 0)$ eine *stationäre* Familie ist. D.h., es gilt

$$\mathbb{P}(T_{x+s} > t) = \mathbb{P}(T_x > s + t \mid T_x > s), \qquad \text{für alle } s, t, x \geq 0.$$

Unser Ziel ist die folgende Formel für die Sterblichkeitsrate zu zeigen:

$$\lambda_x(t) = \frac{q_{x+k}}{1 - (t-k)q_{x+k}}, \qquad \text{für } t \in (k, k+1],\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.15}$$

wobei $q_k = {}_1q_x = \mathbb{P}(T_k \leq 1)$. Zeigen Sie dazu,

(a) dass für $t \in (k, k+1]$ gilt,

$$\bar{F}_x(t) = (1 - (t-k))\mathbb{P}(N_x = k) + \mathbb{P}(N_x \geq k+1).$$

(b) Folgern Sie, dass $\bar{F}_x$ absolut stetig ist mit Dichte

$$f_x(t) = -\mathbb{P}(N_x = k) \quad \text{ auf } t \in (k, k+1].$$

(c) Schließen Sie damit, dass (2.15) gilt.

(d) Berechnen Sie anhand einer aktuellen Sterbetafel, z.B. hier, dass unter diesen Annahmen eine Person Ihres Alters noch mindestens fünf Jahre lebt

Beweis. Zu (a): Siehe dazu die Rechnung im Skript zu Lemma 2.5.
Zu (b): Wir bemerken, dass $\bar{F}_x$ Stückweise stetig differenzierbar ist mit nicht-trivialer Ableitung. Die einzigen Ausnahmen sind die Sprungstellen $t \in \mathbb{N}$. Damit können wir $\bar{F}(t)$ auf jedem Intervall $(k, k+1]$ ableiten und erhalten die Behauptung.

Zu (c): Wir erhalten mit (a) und (b)

$$\begin{aligned}\lambda_x(t) &= \frac{\mathbb{P}(N_x = k)}{(1-(t-k))\mathbb{P}(N_x = k) + \mathbb{P}(N_x \geq k+1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_x = k)}{\mathbb{P}(N_x \geq k) - (t-k)\mathbb{P}(N_x = k)}.\end{aligned}$$

Wir nutzen nun

$$\frac{\mathbb{P}(N_x = k)}{\mathbb{P}(N_x \geq k)} = \mathbb{P}(N_x = k \mid N - x \geq k) = \mathbb{P}(T_x \leq k+1 \mid T_x > k),$$

sowie

$$\mathbb{P}(T_x \leq k+1 \mid T_x > k) = 1 - \mathbb{P}(T_x > k+1 \mid T_x > k) = q_{x+k},$$

aufgrund der Stationarität. Einsetzen liefert (2.15). □