Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine rechtsstetige, monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $a < b$ durch $\mu(a,b] := F(b) - F(a)$ ein eindeutiges Maß auf der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ induziert wird.
Hinweis: Das Maß μ heißt das Lebesgue-Stieltjes-Maß.

Aufgabe 2.2. Seien Z_1 und Z_2 zwei gerichtete Zahlungsströme, für die $Z_1(t) \geq Z_2(t)$ für alle $t \geq 0$ gelte. Zeigen Sie, dass für alle monoton fallenden, messbaren Funktionen $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ und $t \geq 0$ gilt,

$$\int_{[0,t]} g(s) dZ_1(s) \geq \int_{[0,t]} g(s) dZ_2(s).$$

Folgern Sie, dass damit insbesondere für die Barwerte zu allen Zeiten $t \geq 0$ gilt, $b(Z_1)(t) \geq b(Z_2)(t)$.

Aufgabe 2.3. Eine Kundin legt über n Jahre jährlich Betrag π bei einer Bank an, welche das angelegte Geld diskret mit Zinssatz $h \geq 0$ verzinst. Am Ende des n-ten Jahres hebt die Kundin das gesamte Geld ab. Formulieren Sie die zugehörigen Zahlungsströme Z_P und Z_L und berechnen Sie die Barwerte bezüglich der Kapitalfunktion $K(t) = (1+i)^{\lfloor t \rfloor}$. Bestimmen Sie ferner die Rendite von $Z = Z_p - Z_L$.

Aufgabe 2.4.

(a) Sei F die Verteilungsfunktion der Restlebensdauer T_x, wobei wir annehmen, dass F absolut stetig ist, mit stetiger Dichte f. Zeigen Sie, dass $\bar{F}$, und damit F, eindeutig beschrieben wird durch

$$\bar{F}(t) = \exp\Big(- \int_0^t \lambda(s)\ ds \Big),$$

wobei $\lambda(s) = f(s)/\bar{F}(s)$ die Sterblichkeitsrate ist.

(b) Zur Modellierung der Restlebensdauer T_0 betrachtete de Moivres[1] die Sterblichkeitsrate

$$\lambda(t) = \frac{1}{t_{\max} - t}, \qquad t_{\max} > 0, t \in [0, t_{\max}]$$

und $\lambda(t) = 0$ für $t > t_{\max}$. Bestimmen Sie die Verteilung von T_0 zusammen mit Erwartungswert und Varianz.

Aufgabe 2.5. Anders als in Aufgabe 2.4, in der wir eine analytische Form für die Sterblichkeitsrate annehmen, kann diese in der Regel besser durch Sterbetafeln bestimmt werden. In Sterbetafeln werden von Statistik-Instituten die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten und andere Größen veröffentlicht. In dieser Aufgabe wollen wir eine Formel herleiten, wie wir aus diesen die Sterblichkeitsrate bestimmt werden kann. Dazu machen wir zwei vereinfachende Annahmen.

[1]Abraham de Moivre 1667–1754

(A1) Wir nehmen an, dass $T_x = N_x + U_x$, wobei N_x eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist, die das Sterbejahr modelliert, und U_x davon unabhängig uniform auf $(0,1)$ verteilt ist.

(A2) Wir nehmen an, dass $(T_x : x \geq 0)$ eine *stationäre* Familie ist. D.h., es gilt

$$\mathbb{P}(T_{x+s} > t) = \mathbb{P}(T_x > s + t \mid T_x > s), \qquad \text{für alle } s, t, x \geq 0.$$

Unser Ziel ist die folgende Formel für die Sterblichkeitsrate zu zeigen:

$$\lambda_x(t) = \frac{q_{x+k}}{1-(t-k)q_{x+k}}, \qquad \text{für } t \in (k, k+1],\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.15}$$

wobei $q_k = {}_1q_x = \mathbb{P}(T_k \leq 1)$. Zeigen Sie dazu,

(a) dass für $t \in (k, k+1]$ gilt,

$$\bar{F}_x(t) = (1-(t-k))\mathbb{P}(N_x = k) + \mathbb{P}(N_x \geq k+1).$$

(b) Folgern Sie, dass $\bar{F}_x$ absolut stetig ist mit Dichte

$$f_x(t) = -\mathbb{P}(N_x = k) \quad \text{ auf } t \in (k, k+1].$$

(c) Schließen Sie damit, dass (2.15) gilt.

(d) Berechnen Sie anhand einer aktuellen Sterbetafel, z.B. hier, dass unter diesen Annahmen eine Person Ihres Alters noch mindestens fünf Jahre lebt