Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1. Berechnen Sie für $0 < a < b < \infty$ die folgenden Funktionen f und Z die Stieltjes-Integrale $\int_{(a,b]} f(x)dZ(x)$:

(a)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ab} \quad \text{und} \quad Z(x) = x^2;$$

(b)

$$f(x) = x \quad \text{und} \quad Z(x) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^n}{n!}, \text{ für ein } \lambda > 0.$$

Beweis. Zu (a): Da $Z(x)$ differenzierbar ist mit $Z'(x) = z(x)$, erhalten wir

$$\int_{(a,b]} \frac{1}{x^2 + ab} dZ(x) = \int_a^b \frac{2x}{x^2 + ab} dx = \Big[\log(x^2 + ab) \Big]_a^b = \log \tfrac{b}{a}.$$

Zu (b): Wir erkennen in Z die Verteilungsfunktion der Poisson-Verteilung mit Parameter λ und erhalten damit direkt

$$\int_{(a,b]} x dZ(x) = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{a < X \le b\}}],$$

mit X Poisson(λ) verteilt. □

Aufgabe 1.2. Bestimmen Sie die kumulierte Zinsintensität $\Phi(t)$ zum Zeitpunk $t > 0$ für

(a) $K(t) = e^{\delta t}$ für ein $\delta > 0$ und

(b) $K(t) = (1 + i)^{\lfloor t \rfloor}$ für ein $i > 0$.

Beweis. Zu (a): Da $Z(t)$ differenzierbar ist mit Ableitung $Z'(t) = \delta e^{\delta t}$ und da Z damit insbesondere stetig ist, erhalten wir

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{\delta e^{\delta t}}{e^{\delta t}} dt = \delta t.$$

Zu (b): Wir bemerken zuerst, dass für $k < t \le k + 1$ gilt, $K(t-) = (1 + i)^k$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\Phi(t) = \int_{(0,t]} \frac{dK(s)}{K(s-)} &= \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} (1 + i)^{-(j-1)} \int_{(j-1,j]} dK(s) + (1 + i)^{\lfloor t \rfloor} \int_{(\lfloor t \rfloor, t]} dK(s) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} (1 + i)^{-(j-1)} [K(j + 1) - K(j)] + (1 + i)^{\lfloor t \rfloor} \underbrace{[K(t) - K(\lfloor t \rfloor)]}_{=0} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} (1 + i)^{-(j-1)} [(1 + i)^j - (1 + i)^{j-1}] = i \lfloor t \rfloor.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.3. Ein Kunde überweist 10 Jahre lang am Anfang jeden Jahres Betrag x auf ein Sparbuch. Bestimmen sie den zugehörigen Zahlungsstrom Z und bestimmen Sie dessen Barwert, wenn die Kapitalfunktion durch $K(t) = (1+i)^{-\lfloor t \rfloor}$ gegeben ist.

Beweis. Der Zahlungsstrom ist gegeben durch $Z(t) = x\lfloor t \rfloor \mathbb{1}_{\{t<10\}} + 10x\mathbb{1}_{\{t\geq 10\}}$. Damit ergibt sich der folgenden Barwert

$$b(Z) = x\sum_{j=0}^{10}(1+i)^{-j} = x\frac{(1+i)[1-(1+i)^{-11}]}{i}.$$

□

Aufgabe 1.4. Zeigen Sie, dass für eine nicht-negative Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F gilt,

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1-F(x))dx.$$

Beweis. Da X nicht-negativ ist, gilt insbesondere $X = \int_0^X dx$. Es folgt mit dem Satz von Fubini

$$\mathbb{E}X = \int X d\mathbb{P} = \int\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x<X\}}dx = \int_0^\infty \int \mathbb{1}_{\{X>x\}}d\mathbb{P}\,dx = \int_0^\infty (1-F(x))dx.$$

□

Aufgabe 1.5. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, uniform verteilt auf $(0,1)$. Wir setzen $Z = \mathbb{1}_{\{X<Y\}}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z \mid Y]$.

Beweis. Da Y unabhängig ist von X, sollte X, gegeben $Y = y$, gelten $\mathbb{P}(X < y) = y$, also $\mathbb{E}[Z \mid Y] = Y$. In der Tat gilt für $A = \{Y \leq z\} \in \sigma(Y)$ einerseits

$$\int_A Y d\mathbb{P} = \int_0^z y dy = \tfrac{z^2}{2}$$

und andererseits wegen der Unabhängigkeit von X und Y

$$\int_A \mathbb{1}_{\{X<Y\}}d\mathbb{P} = \int_0^z\int_0^y dxdy = \tfrac{z^2}{2}.$$

Insbesondere gilt damit, da $\int_A Zd\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ für alle $A \in \sigma(Y)$, und daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 1.6. Eine Nadel der Länge 1 werde zufällig auf ein (unendlich großes) liniertes Papier geworfen, wobei die Linien Abstand 1 haben. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Nadel eine der Linien kreuzt?

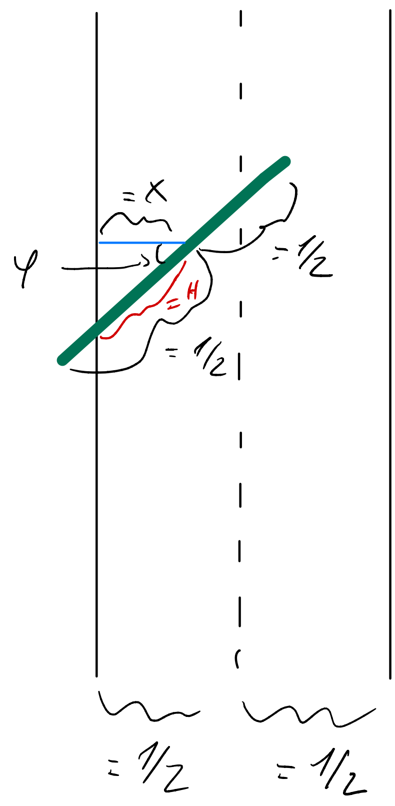
Beweis. Sei X der Abstand des Mittelpunkts der Nadel zur nächstgelegenen Linie und φ der Winkel der Nadel zum Lot der Linien. Dann ist X uniform auf $(0, 1/2)$ und φ uniform auf $(-\pi/2, \pi/2)$ verteilt. Wir nehmen an, dass X und φ unabhängig sind. Das Ereignis, dass die Nadel die Linie kreuzt, ist dann $\{(X,\varphi) \in B\}$ mit

$$B = \Big\{(x,y) : |y| \leq \tfrac{\pi}{2} \text{ und } x \in [0, \tfrac{1}{2}\cos y]\Big\}.$$

Siehe dazu die Skizze. Es folgt aus der Unabhängigkeit von X und φ, dass

$$
\begin{aligned}
P\{(X,\varphi)\in B\} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P\{(X,y)\in B\}\tfrac{dy}{\pi} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P\Big\{X\in[0,\tfrac{1}{2}\cos y]\Big\}\tfrac{dy}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\frac{1}{2}\cos y} 2\;dx\;dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(y)\;dy \\
&= \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}
$$

□



$\cos\varphi = \dfrac{X}{H}$

und Nadel schneidet die Linie $\Leftrightarrow$ $H \leq 1/2$