

## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1.1.** Berechnen Sie für  $0 < a < b < \infty$  die folgenden Funktionen  $f$  und  $Z$  die Riemann-Stieltjes-Integrale  $\int_{(a,b]} f(x)dZ(x)$ :

(a)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ab} \quad \text{und} \quad Z(x) = x^2;$$

(b)

$$f(x) = x \quad \text{und} \quad Z(x) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \text{für ein } \lambda > 0.$$

**Aufgabe 1.2.** Bestimmen Sie die kumulierte Zinsintensität  $\Phi(t)$  zum Zeitpunkt  $t > 0$  für

(a)  $K(t) = e^{\delta t}$  für ein  $\delta > 0$  und

(b)  $K(t) = (1 + i)^{\lfloor t \rfloor}$  für ein  $i > 0$ .

**Aufgabe 1.3.** Ein Kunde überweist 10 Jahre lang am Anfang jeden Jahres Betrag  $x$  auf ein Sparbuch. Bestimmen sie den zugehörigen Zahlungsstrom  $Z$  und bestimmen Sie dessen Barwert, wenn die Kapitalfunktion durch  $K(t) = (1 + i)^{-\lfloor t \rfloor}$  gegeben ist.

**Aufgabe 1.4.** Zeigen Sie, dass für eine nicht-negative Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F$  gilt,

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F(x))dx.$$

**Aufgabe 1.5.** Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen, uniform verteilt auf  $(0, 1)$ . Wir setzen  $Z = \mathbb{1}_{\{X < Y\}}$ . Bestimmen Sie  $\mathbb{E}[Z | Y]$ .

**Aufgabe 1.6.** Eine Nadel der Länge 1 werde zufällig auf ein (unendlich großes) liniertes Papier geworfen, wobei die Linien Abstand 1 haben. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Nadel eine der Linien kreuzt?