

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 9

Abgabe am 17. bis 19. Juni 2008

AUFGABE 9.1 (4 Punkte) — Seien X und Y zwei unabhängige, zu den Parametern λ bzw. $\mu \in (0, \infty)$ exponentialverteilte Zufallsgrößen. Ferner seien

$$N = \mathbb{1}_{\{X \geq Y\}}, \quad U = \min\{X, Y\}, \quad W = |X - Y|.$$

- (i) Zeigen Sie, daß N und U unabhängig sind.
- (ii) Zeigen Sie, daß U und W unabhängig sind.

Hinweis: Eine diskrete Zufallsgröße A mit abzählbarer Wertemenge I und eine kontinuierliche, reelle Zufallsgröße B sind genau dann unabhängig, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $i \in I$ gilt: $\mathbb{P}(A = i, B > t) = \mathbb{P}(A = i)\mathbb{P}(B > t)$.

AUFGABE 9.2 (4 Punkte) — Es seien $\alpha \in (0, \infty)$ fest und X_1, \dots, X_n unabhängige, auf $[0, \alpha]$ gleichförmig verteilte Zufallsgrößen. Zeigen Sie Folgendes:

- (i) Eine Dichte der Zufallsgröße $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ist gegeben durch die Abbildung $x \mapsto \mathbb{1}_{[0, \alpha]}(x)n\alpha^{-n}x^{n-1}$, und ihr Erwartungswert ist $\mathbb{E}(M_n) = \frac{n}{n+1}\alpha$.
- (ii) Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $Y_n = n(\alpha - M_n)$ gegen die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\frac{1}{\alpha}$.

AUFGABE 9.3 (4 Punkte) — Es sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, d.h. X sei normalverteilt zu den Parametern $\mu = 0$ und σ^2 . Zeigen Sie:

- (i) $\mathbb{E}(|X|^p) = \sqrt{2^p/\pi} \cdot \Gamma(\frac{p+1}{2})\sigma^p$ für jedes $p > 0$.
- (ii) $\mathbb{E}(X^p) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sigma^{2n}, & \text{falls } p = 2n, \\ 0, & \text{falls } p = 2n-1, \end{cases}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Funktionalgleichung der Γ -Funktion sowie an die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

AUFGABE 9.4 (4 Punkte) — Seien X, Y zwei Zufallsgrößen mit der gemeinsamen Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}, & \text{falls } x \operatorname{sign}(y) \geq y \operatorname{sign}(x), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $X, Y, X + Y$ und $X - Y$ zentrierte, normalverteilte Zufallsgrößen sind mit $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 1$ und $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X - Y) = 2$.
- (b) Zeigen Sie, dass X und Y zwar unkorreliert, aber nicht unabhängig sind.