Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 9

Abgabe in den Übungen vom 11. bis 14. Dezember 2007

AUFGABE 9.1 (4 Punkte) — Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ die Menge aller elementaren Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, also die Menge aller endlichen Vereinigungen beschränkter Rechtecke. Sei

$$\lambda^*(A) = \inf \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(R_n) \colon R_1, R_2, \dots \in \mathcal{E}, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \Big\}, \qquad A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

das äußere Lebesgue-Maß, wobei $\lambda \colon \mathcal{E} \to [0,\infty)$ wie in Abschnitt 2.1 definiert ist. Sei $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ Lebesgue-messbar im Sinne der Definition 2.1.5, d. h., es existiere zu jedem $\varepsilon > 0$ eine elementare Menge B mit $\lambda^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Zeigen Sie, dass A auch im Sinne der Definition 2.3.13 messbar bezüglich λ^* ist, d. h. dass für jedes $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ gilt: $\lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A^c \cap E) = \lambda^*(E)$.
Tipp: Orientieren Sie sich am Beweis der Existenzaussage im Satz von Carathéodory.

AUFGABE 9.2 (4 Punkte) —

(i) Seien μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und F_μ die zugehörige Verteilungsfunktion, und es sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F_μ genau dann in x stetig ist, wenn $\mu(\{x\}) = 0$ ist.

(ii) Charakterisieren Sie das Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, dessen Verteilungsfunktion gegeben ist durch $F_\mu(x) = 0 \vee (x \wedge 1)$, indem Sie für beliebige $a \leq b$ den Wert von $\mu((a,b))$ berechnen.

Definition: Wir bezeichen mit $a \vee b = \max\{a,b\}$ und mit $a \wedge b = \min\{a,b\}$ das Maximum bzw. das Minimum zweier Zahlen a und b.

AUFGABE 9.3 (4 Punkte) — Seien Ω_1 und Ω_2 zwei nichtleere Mengen, $f \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ ein Mengensystem. Beweisen Sie, dass

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

AUFGABE 9.4 (4 Punkte) — Es seien $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $f \colon \Omega \to [0,\infty]$ eine nichtnegative Funktion und $A := \{ (\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \colon 0 < y < f(\omega) \}$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist } \mathcal{F}\text{–}\mathcal{B}\text{-messbar} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{B}).$$

Tipps: „$\Rightarrow$“: Betrachten Sie $A_t := \{ \omega \in \Omega \colon f(\omega) > t \} \times (0,t)$ für $t \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)$.
„$\Leftarrow$“: Betrachten Sie Schnitte von $\mathbb{1}_A$.