Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 2

Abgabe in den Übungen vom 23. bis 26. Oktober 2007

AUFGABE 2.1 (3 Punkte) — Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{falls } x^2+y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2)$ liegt, und berechnen Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

AUFGABE 2.2 (5 Punkte) — *Alternativbeweis des Transformationssatzes für lineare Transformationen.* Zeigen Sie für jede Matrix $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ und jede Funktion $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax)|\det(A)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

indem Sie zunächst zeigen, dass sich A als ein Produkt von Matrizen schreiben lässt, die sich nur in einer Zeile von der Einheitsmatrix unterscheiden, und dann die obige Formel direkt für solche Matrizen an Stelle von A zeigen.

AUFGABE 2.3 (4 Punkte) — Es sei bekannt, dass $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ gilt. Zeigen Sie damit und mit Hilfe des Transformationssatzes für lineare Transformationen (Satz 1.2.5), dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ und jede symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\langle x, Ax\rangle}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

AUFGABE 2.4 (4 Punkte) —

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, gegeben durch $g(t) = \exp(-\frac{1}{1-t^2})$ für $|t| \leq 1$ und $g(t) = 0$ für $|t| \geq 1$, in $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ liegt und unendlich oft differenzierbar ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an den Beweis dafür, dass die Taylorreihe von $t \mapsto \exp(-t^{-2})\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$ gleich Null ist.

(ii) Benutzen Sie die Funktion g aus (i), um für jedes $\alpha \in (0,\infty)$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion $h_\alpha\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ zu konstruieren, die im Intervall $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ gleich Eins und außerhalb von $[-\alpha,\alpha]$ gleich Null ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}g(\mathrm{e}^{4/3}g(x))$.