Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 12

Abgabe in den Übungen vom 15. bis 18. Januar 2008

AUFGABE 12.1 (4 Punkte) —

(i) Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Ableitung jeder differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist.

AUFGABE 12.2 (2 Punkte) — Wir betrachten ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und seine Momenten erzeugende Funktion $M(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx}\, \mu(\mathrm{d}x)$. Wir setzen voraus, dass die Menge $I = \{t \in \mathbb{R}\colon M(t) < \infty\}$ ein nichtleeres Inneres hat. Benutzen Sie die Hölder'sche Ungleichung, um zu zeigen, dass I ein Intervall ist und $\log M$ auf I konvex.

AUFGABE 12.3 (2 Punkte) — Benutzen Sie die Young'sche Ungleichung, um die Hölder'sche Ungleichung zu zeigen.

Die YOUNG'SCHE UNGLEICHUNG besagt, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ und alle $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt: $x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$. Siehe etwa Aufgabe 13.5 der Vorlesung *Differenzial- und Integralrechnung I* des Wintersemesters 2006/07, wo dies mit Hilfe der Konkavität des Logarithmus bewiesen wurde.

AUFGABE 12.4 (4 Punkte) — Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Messraum. Sei weiter $f\colon \Omega \to \Omega'$ eine $\mathcal{F}$–$\mathcal{F}'$–messbare Abbildung. Beweisen Sie:

(i) μ ist endlich genau dann, wenn $\mu \circ f^{-1}$ endlich ist.
(ii) Ist $\mu \circ f^{-1}$ σ–endlich, so ist auch μ σ–endlich.
(iii) Die Umkehrung in (ii) ist i. Allg. falsch.

AUFGABE 12.5 (4 Punkte) — Seien μ und ν Maße und sei $\varphi = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Beweisen Sie:

(i) $\varphi > 0$ ν-f.ü.
(ii) Ist $\nu \leq \mu$, so gilt $\varphi \leq 1$ ν-f.ü.