LÖSUNGSSKIZZEN ZUR ÜBUNGSSCHEINKLAUSUR ZUR VORLESUNG 'WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE I'

Aufgabe 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X<Y) &\overset{(\mathbf{4P}.)}{=} \int_{\{(x,y)\in(0,\infty)^2\colon x<y\}} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}\beta\mathrm{e}^{-\beta y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\overset{(\mathbf{3P}.)}{=} \alpha\beta\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\int_x^\infty \mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\beta y} = \alpha\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\beta x} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad (\mathbf{3P}.).\end{aligned}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S|] &\overset{(\mathbf{3P}.)}{\leq} \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T=k\}}\sum_{i=1}^k |X_i|\Big] \overset{(\mathbf{4P}.)}{=} \sum_{k=0}^\infty\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(T=k)\mathbb{E}[|X_1|]\\ &= \mathbb{E}[|X_1|]\sum_{k=0}^\infty k\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{E}[|X_1|]\mathbb{E}[T]<\infty \qquad (\mathbf{3P}.).\end{aligned}$$

Aufgabe 3.

$$\mathbb{E}[F(\sigma)] \overset{(\mathbf{4P}.)}{=} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sigma(i)=i\}}] \overset{(\mathbf{3P}.)}{=} \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(\sigma(i)=i) = \sum_{i=1}^N \frac{(N-1)!}{N!} = 1 \qquad (\mathbf{3P}.).$$

Aufgabe 4. Wir wählen $\Omega=\{1,2,3\}^4$, wobei '1' bedeutet: 'fehlt', '2' bedeutet: 'defekt', und '3' bedeutet: 'einwandfrei', und die vier Komponenten stehen für die vier Halme. **(2 P.)** Wir betrachten die Gleichverteilung auf Ω, die Produktverteilung der Gleichverteilung auf $\{1,2,3\}$ **(2 P.)**. Dann ist

$$\begin{aligned}A &\overset{(\mathbf{2P}.)}{=} \{\omega\in\Omega\colon \text{ es gibt } i,j\in\{1,\dots,4\} \text{ mit } \omega_i=1,\omega_j=3\}\\ &\overset{(\mathbf{2P}.)}{=} \Big((\{2,3\}^4\cup\{1,2\}^4)\setminus\{2\}^4\Big)^{\mathrm{c}},\end{aligned}$$

also ist $|A|=3^4-(2^4+2^4-1)=81-31=50$. Daher ist $\mathbb{P}(A)=3^{-4}|A|=\frac{50}{81}$. **(2 P.)**

Aufgabe 5. Für jedes $t\in(0,\infty)$ gilt

$$\mathbb{P}(X\leq t) \overset{(\mathbf{3P}.)}{=} \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\mathrm{e}^{-\omega}\mathbb{1}_{\{X(\omega)\leq t\}} \overset{(\mathbf{2P}.)}{=} \int_0^{\alpha t^\beta} \mathrm{d}\omega\,\mathrm{e}^{-\omega} = \int_0^t \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}\alpha\beta x^{\beta-1} \qquad (\mathbf{3P}.).$$

Also ist $x\mapsto \alpha\beta x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}$ eine Dichte von X. **(2 P.)**

Aufgabe 6. Seien Ω die Menge der getesteten Personen, ausgestattet mit der gleichf¨ormigen Verteilung, B_1 die Menge der kranken und B_2 die Menge der gesunden getesteten Personen. Es sei A die Menge der Personen, bei denen der Test anspricht **(3 P.)**. Dann sind $\mathbb{P}(B_1) = 0,01$, $\mathbb{P}(A \mid B_1) = 0,95$ und $\mathbb{P}(A \mid B_2) = 0,1$ **(2 P.)**. Daher ist die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit nach der Bayes'schen Formel gleich

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A) \stackrel{(\mathbf{3P}.)}{=} \frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A \mid B_1)}{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A \mid B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A \mid B_2)} = \frac{\frac{1}{100}\frac{95}{100}}{\frac{1}{100}\frac{95}{100} + \frac{99}{100}\frac{1}{10}} = \frac{95}{95+990} = \frac{19}{217} \qquad (\mathbf{2P}.).$$

Aufgabe 7. F¨ur jedes $\varepsilon > 0$ gilt nach der Tschebyscheff-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\tfrac{1}{n}S_n - E| > \varepsilon) &\stackrel{(\mathbf{3P}.)}{\le} \frac{\mathbb{V}(\frac{1}{n}S_n)}{\varepsilon^2} \stackrel{(\mathbf{1P}.)}{=} \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) \\
&\stackrel{(\mathbf{2P}.)}{=} \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\Big(\sum_{i=1}^n \mathrm{cov}(X_i, X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)\Big) \\
&\stackrel{(\mathbf{2P}.)}{\le} \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\Big(n + 2\sum_{i=1}^n \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus\{i\}} \frac{1}{|i-j|^2}\Big) = \frac{1}{n\varepsilon^2} + \frac{4}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} \\
&\stackrel{(\mathbf{2P}.)}{\le} \frac{1 + 4\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2}}{n\varepsilon^2},
\end{aligned}$$

und dies konvergiert gegen Null f¨ur $n \to \infty$.

Aufgabe 8. X und $|X|$ sind unkorreliert **(1 P.)**, denn

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X, |X|) &= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(|X| - \mathbb{E}[|X|])\big] = \mathbb{E}\big[X\,|X|\big] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[|X|] \\
&= \frac{1}{5}\big((-2)\times 2 + (-1)\times 1 + 0 + 2\times 2 + 1\times 1\big) = 0 \qquad (\mathbf{4P}.).
\end{aligned}$$

X und $|X|$ sind aber nicht unabh¨angig **(1 P.)**, denn z. B. gilt

$$\mathbb{P}(X = 0, |X| = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{25} = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(|X| = 0) \qquad (\mathbf{4P}.).$$

Aufgabe 9. wffw