

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 7

Abgabe in den Übungen vom 1. bis 6. Dezember 2005

AUFGABE 7.1 Es seien X und Y zwei \mathbb{R}^d -wertige Zufallsgrößen mit charakteristischen Funktionen φ_X bzw. φ_Y . Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (i) φ ist genau dann reellwertig, wenn X und $-X$ die selbe Verteilung haben.
- (ii) Wenn X und Y unabhängig sind, so gilt $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$.

4 Punkte

AUFGABE 7.2 Sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion φ . Es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Zeigen Sie, dass φ für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ mindestens n Mal differenzierbar ist und dass die Ableitungen gegeben sind durch

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{itX}].$$

4 Punkte

Hinweis: Betrachten Sie $Y_k(t, h, x) = k!h^{-k}e^{itX} \left(e^{ihX} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(ihX)^l}{l!} \right)$.

AUFGABE 7.3 (SATZ VON CRAMÉR-WOLD) Seien X, X_1, X_2, \dots Zufallsvektoren mit Werten im \mathbb{R}^d . Zeigen Sie, dass $X_n \implies X$ genau dann gilt, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\langle \lambda, X_n \rangle \implies \langle \lambda, X \rangle$.

4 Punkte

Hinweis: Bei der Richtung ' \Leftarrow ' zeigen Sie zunächst die Straffheit und betrachten dann die charakteristischen Funktionen.

AUFGABE 7.4 Es sei X ein \mathbb{R}^d -wertiger Zufallsvektor mit einer positiv definiten Kovarianzmatrix. Zeigen Sie, dass X genau dann normalverteilt ist, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ die Zufallsgröße $\langle \lambda, X \rangle$ normalverteilt ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\langle \lambda, X \rangle$. **4 Punkte**

Hinweis (Wiederholung): Auf Wunsch Herrn Schmüdgens wird eine Vorlesung getauscht: Am **Montag, dem 28. November**, wird von **15²⁰ Uhr bis 16⁵⁰ Uhr** im Theoretischen Hörsaal des Physikalischen Instituts (Linnéstr. 5) eine Vorlesung *Wahrscheinlichkeitstheorie II* gehalten, und am **Mittwoch, dem 7. Dezember**, wird von **13¹⁵ Uhr bis 14⁴⁵ Uhr** im 0-99 im Seminargebäude eine Vorlesung *Funktionalanalysis* gehalten.