Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 4

Abgabe in den Übungen vom 10. bis 15. November 2005

AUFGABE 4.1 Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Zufallsgrößen. Es existiere eine Funktion $H\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $\lim_{x\to\infty} H(x)/x = \infty$ und $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[H(X_i)] < \infty$. Zeigen Sie, dass $(X_i)_{i\in I}$ gleichgradig integrierbar ist.

2 Punkte

AUFGABE 4.2 Es sei Φ eine Familie von Teil-σ-Algebren und X eine integrierbare Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass $\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]\colon \mathcal{A} \in \Phi\}$ gleichgradig integrierbar ist. **4 Punkte**

AUFGABE 4.3 (SATZ VON SLUTZKY) Sei $(E, \mathtt{d})$ ein polnischer Raum, und seien $X, X_1, X_2, \dots$ und $Y_1, Y_2, \dots$ Zufallsgrößen mit Werten in E. Die Verteilung von X_n konvergiere schwach gegen die von X, und die Folge $\mathtt{d}(X_n, Y_n)$ konvergiere in Wahrscheinlichkeit gegen Null. Zeigen Sie, dass dann auch die Verteilung von Y_n schwach gegen die von X konvergiert. **3 Punkte**

AUFGABE 4.4 Sei $(E, \mathtt{d})$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E genau dann gegen ein $x \in E$ konvergiert, wenn die Folge der Diracmaße δ_{x_n} gegen δ_x konvergiert.

3 Punkte

AUFGABE 4.5 Sei $(E, \mathtt{d})$ ein metrischer Raum, und es seien $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf E mit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}$ im schwachen Sinn. Sei $f\colon E \to \mathbb{R}$ stetig (und eventuell unbeschränkt). Zeigen Sie Folgendes:

(i) Falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f| \,\mathrm{d}\mathbb{P}_n < \infty$, so gilt $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mathbb{P} < \infty$.

(ii) Es gibt E, f und $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$ wie oben (d. h. insbesondere mit $\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}$), so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E |f| \,\mathrm{d}\mathbb{P}_n < \infty$ gilt, aber $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mathbb{P}_n$ nicht gegen $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mathbb{P}$ konvergiert.

(iii) Falls eine stetige Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ mit $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)/x = \infty$ existiert, so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_E \varphi(|f|) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_n < \infty$ gilt, so gilt $\lim_{n\to\infty} \int_E |f| \,\mathrm{d}\mathbb{P}_n = \int_E |f| \,\mathrm{d}\mathbb{P}$.

Hinweis zu (i): Betrachten Sie $|f| \wedge M$ für $M > 0$.
Hinweis zu (ii): Es genügen Zweipunktmaße auf $\mathbb{Z}$. **4 Punkte**