Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

# Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 14

In Aufgaben 14.1 und 14.2 können Bonuspunkte für das Hausaufgabenkriterium erworben werden; sie werden nur für Bedürftige korrigiert. Aufgabe 14.3 kann in den Übungsgruppen besprochen werden.

AUFGABE 14.1 Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $M_n := \min\{S_0, \dots, S_n\}$. Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $j \leq 0$ und $i \geq j$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_n(M_n = j, S_n = i) &= \mathbb{P}_n(S_n = i - 2j) - \mathbb{P}_n(S_n = i - 2j + 2),\\ \mathbb{P}_n(M_n = j) &= \mathbb{P}_n(S_n \in \{j-1, j\}).\end{aligned}$$

**4 Punkte**

AUFGABE 14.2 Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{2n}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = u_{2n},$$

wobei $u_{2n} = \mathbb{P}_{2n}(S_{2n} = 0)$. **4 Punkte**

AUFGABE 14.3 (ZUSAMMENTREFFEN UNABHÄNGIGER IRRFAHRTEN) Es sei $r \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Für $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ seien $\{S_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige, symmetrische, im Ursprung startende Irrfahrten auf $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass sich für $r \leq 3$ die $r$ Irrfahrten mit Wahrscheinlichkeit Eins zu unendlich vielen Zeitpunkten im selben Punkt treffen, aber dass dies falsch ist für $r > 3$.

*Hinweise:* Hilfreich sind die Beziehungen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2.$$

Einen Beweis können Sie mit Hilfe von probabilistischen Überlegungen oder eines Koeffizientenvergleichs für $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ herstellen. Für $r > 3$ ist die Abschätzung

$$\binom{n}{k}^r \leq \binom{n}{k}^2 \max_{j\in\{0,1,\dots,n\}} \binom{n}{j}^{r-2}$$

nützlich. Schätzen Sie im Fall $r = 3$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich die drei Irrfahrten zum Zeitpunkt $n$ im Bereich zwischen $-\sqrt{n}$ und $\sqrt{n}$ treffen, mit Hilfe des Satzes von de Moivre-Laplace ab unter Beachtung der Tatsache, dass lokal gleichmäßige Konvergenz der reskalierten Wahrscheinlichkeiten vorliegt. (Diese Methode ist auch für $r = 2$ anwendbar.)