Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg 21 (1977) Heft 7
Sektion Mathematik und Physik · Direktor: Prof. Dr. sc. nat. H. Rodner
DK 511.7:662.614 Eingang: 19. 1. 1977

Asymptotische Lösung der ebenen Wärmebilanzgleichung für stationäre Grenzschichtströmungen

Dipl.-Math. *L. Tobiska*

Die ebene Wärmebilanzgleichung wird bei bekanntem stationären Strömungsfeld asymptotisch für große Werte von RePr gelöst. Es wird untersucht, wie sich ein an der Stelle $x = x_0$ ausgebildetes Temperaturprofil bei vorgeschriebener Temperaturverteilung $T_W(x)$ an der Wand ändert. Für die Temperaturverteilung wird die asymptotische Approximation hergeleitet und deren Fehlerordnung angegeben. Die Approximation wird zur Berechnung des örtlichen Wärmestroms an der Wand verwendet.

Die ebene Wärmebilanzgleichung hat im Fall konstanter Stoffwerte für stationäre Strömungen die Form

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

wobei u, v die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung, a die Temperaturleitfähigkeit und T die Temperatur bezeichnen. Werden wie üblich dimensionslose Variable eingeführt, so geht die Gleichung (1) in die Gleichung

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re\,Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

über, in der Re die Reynoldzahl und Pr die Prandtlzahl bezeichnen. Für die Gleichung (2) soll eine Fortsetzungsaufgabe gelöst werden, d. h. es ist zu untersuchen, wie sich eine an der Stelle $x = x_0$ ausgebildete Temperaturverteilung $T_A(y)$ unter dem Einfluß einer vorgeschriebenen Temperaturverteilung $T_W(x)$ an der Körperoberfläche ändert. Dabei werden die Geschwindigkeitskomponenten sowie die Stromfunktion

$$\psi(x, y) = \int_0^y u(x, t)\,\mathrm{d}t$$

als bekannt vorausgesetzt und das Gebiet zwischen den Geraden $x = x_0$, $x = x_1$, $y = 0$ und einer Stromlinie $\psi = \text{const}$ zugrunde gelegt. Für praktisch wichtige Fälle ist das Produkt $Re\,Pr$ groß, so daß sich asymptotische Methoden zur Lösung der Gleichung (2) anbieten. In dieser Arbeit wird für beliebige inkompressible stationäre Strömungen eine asymptotische Approximation der Temperaturverteilung, die für kleine Werte des Parameters $\varepsilon = (Re\,Pr)^{-1}$ gültig ist, ermittelt.

Die Gleichung (2) wird zunächst auf die neuen unabhängigen Variablen

$$\xi = \sqrt{\psi(x, y)} \qquad \eta = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\tau(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \tau(x) = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

transformiert. Dividiert man die entstandene Gleichung durch

$$\frac{u(x, y)\sqrt{\tau(x)}}{\sqrt{\psi(x, y)}},$$

so erhält man

$$\xi\frac{\partial T}{\partial \eta} = \varepsilon L[T], \tag{3}$$

wobei L einen linearen elliptischen Differentialoperator 2. Ordnung bezeichnet. Die Randbedingungen werden überführt in

$$T(\xi, 0) = g(\xi), \qquad T(0, \eta) = h(\eta) \tag{4}$$

mit

$$g\left(\sqrt{\psi(x_0, y)}\right) = T_A(y), \quad h\left(\int_{x_0}^{x} \sqrt{\tau(x)}\,\mathrm{d}x\right) = T_w(x).$$

Die Differentialgleichung (3) besitzt wegen $\xi\dfrac{\partial T}{\partial \eta} = 0$ für $\xi = 0$ Wendepunkte. Die in der Literatur bekannten Verfahren, z. B. [1], [2], [3], beziehen sich jedoch nur auf Probleme ohne Wendepunkte. Während sich die Konstruktion von formalen Approximationen in analoger Weise durchführen läßt, ist der Nachweis des asymptotischen Charakters dieser Lösungen wesentlich komplizierter. Im folgenden soll deshalb die Konstruktion der Approximation ausführlich behandelt und die Fehlerordnung nur angegeben werden.

In erster Näherung setzt man in (3) $\varepsilon = 0$ und erhält die Näherungslösung $T_0(\xi) = g(\xi)$, die nur der ersten Bedingung von (4) genügt. Die Differenz

$$T_1(\xi, \eta) = T(\xi, \eta) - T_0(\xi)$$

genügt dann dem Randwertproblem

$$\xi\frac{\partial T_1}{\partial \eta} = \varepsilon L[T_1] + \varepsilon L[g] \tag{5}$$

$$T_1(\xi, 0) = 0, \quad T_1(0, \eta) = h(\eta) - g(0). \tag{6}$$

Zur Erfüllung der zweiten Randbedingung wird in (5) die Grenzschichtvariable $\varrho = \dfrac{\sqrt{2}\,\xi}{\varepsilon^{1/3}}$ eingeführt und nach der Transformation $\varepsilon = 0$ gesetzt. Man erhält das Problem

$$\varrho\frac{\partial T_1}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varrho^2}$$

$$T_1(\varrho, 0) = 0, \quad T_1(0, \eta) = h(\eta) - g(0),$$

dessen Lösung durch Anwendung der Laplacetransformation bezüglich η angegeben werden kann:

$$T_1(\varrho, \eta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_{\varrho^3/9\eta}^{\infty} t^{-2/3} e^{-t}\left[h\left(\eta - \frac{\varrho^3}{9t}\right) - g(0)\right]\mathrm{d}t. \tag{7}$$

In (7) bezeichnet Γ die Gammafunktion. Unter Verwendung des Maximumprinzips für elliptische Differential-