Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 26.01.2026

Numerik I

Übungsserie 12 (letze Übungsserie)

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Explizites Euler-Verfahren.* Betrachte das Anfangswertproblem

$$(1+x)y'(x) + y(x) = \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1.$$

   (a) Man berechne eine Approximation der Lösung mit dem expliziten Euler-Verfahren in $[0,1]$ mit den Schrittweiten $h_1 = 0.2$ und $h_2 = 0.1$.
   Hinweis: man schreibe ein kleines Programm.

   (b) Man berechne den Fehler zur analytischen Lösung

$$y(x) = \frac{\ln(x+1)+1}{1+x}$$

   in $x = 1$.

   (c) Die Ergebnisse sollen kurz diskutiert werden.

4 Punkte

2. *Abschätzung für eine Folge reeller Zahlen.* Man beweise folgende Aussage. Gelten für reelle Zahlen x_n, $n = 0, 1, \ldots$, die Ungleichungen

$$|x_{n+1}| \le (1+\delta)\,|x_n| + \beta$$

   mit Konstanten $\delta > 0$, $\beta \ge 0$, so gilt

$$|x_n| \le e^{n\delta}\,|x_0| + \frac{e^{n\delta}-1}{\delta}\beta, \quad n = 0, 1, \ldots$$

3 Punkte

3. *Bedingungen für die Konsistenz eines drei-stufigen Runge–Kutta-Verfahrens der Ordnung* 3. Betrachte das autonome AWP

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

   Eine Approximation der Lösung soll auf einem äquidistanten Gitter mit einem expliziten drei-stufigen Runge–Kutta-Verfahren berechnet werden. Man leite die im Vorlesungsskript angegeben Bedingungen dafür her, dass dieses Verfahren von dritter Ordnung konsistent ist. Dabei soll für die Koeffizienten des Runge–Kutta-Verfahrens

$$c_2 = a_{21}, \quad c_3 = a_{31} + a_{32}$$

   gelten.
   Hinweis: Man nutze die gleiche Herangehensweise wie sie für die Methode zweiter Ordnung in der Vorlesung präsentiert wurde. **5 Punkte**

4. *Lineares Gleichungssystem für die Finite-Differenzen-Methode für das Poisson-Problem.* Betrachte das Randwertproblem (Poisson-Problem)

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{in } (0,1), \\ u(0) &= a, \\ u(1) &= b. \end{aligned}$$

Man nutze ein äquidistantes Gitter

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1, \quad h = x_i - x_{i-1},\ i = 1, \ldots, n,$$

zur Diskretisierung der zweiten Ableitung.

(a) Man zeige, dass die Finite-Differenzen-Approximation

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} =: u_{\overline{x}x,i}, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

von zweiter Ordnung konsistent ist, d.h. dass für $u \in C^4([0,1])$

$$u_{\overline{x}x,i} = u''(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

gilt.

(b) Man ersetze in der Differentialgleichung die zweite Ableitung durch diese Finite-Differenzen-Approximation und leite ein lineares Gleichungssystem für eine Approximation der Werte in den Knoten $u_i \approx u(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, her. Dabei berücksichtige man die gegebenen Randbedingungen und verwende als Approximation der rechten Seite $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

(c) Man reduziere das lineare Gleichungssystem auf ein System für u_i, $i = 1, \ldots, n-1$, durch Elimination der Gleichungen für die Randbedingungen.

3 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 04.02.2026, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.