Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 05.01.2026

Numerik I

Übungsserie 09

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Absolute Kondition der Bestimmung von Nullstellen.* Seien $f \in C^n([a,b])$ und $x_0 \in (a,b)$ eine n-fache Wurzel (Nullstelle) von

$$f(x) - \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

aber keine $(n+1)$-fache Wurzel.

(a) Man betrachte eine kleine Störung ε der Daten α und zeige, dass für die absolute Kondition K dieses Problems gilt

$$K \approx \left| \frac{n!}{f^{(n)}(x_0)} \right| \varepsilon^{1/n-1}.$$

Was folgt daraus, wenn die Störung beliebig klein wird?

(b) Die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms, was man beispielsweise braucht, wenn man die Eigenwerte einer Matrix mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnen will, ist ein Spezialfall der obigen Aufgabe. Sei $f(x)$ nun ein Polynom n-ten Grades mit der n-fachen Nullstelle x_0. Wie lässt sich die Aussage des ersten Teils verschärfen?

Hinweis: Für den ersten Teil verwende man eine Taylor-Entwicklung von $f(x)$ in x_0 und approximiere den Term mit der unbekannten Zwischenstelle durch den gleichen Term an der Stelle x_0. **4 Punkte**

2. *Gerschgorin-Kreise.* Man schätze mit Hilfe von Gerschgorin-Kreisen die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

ab. Man stelle die Lösung graphisch dar. **2 Punkte**

3. *Eindeutigkeit der QR-Zerlegung.* Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit Vollrang. Man zeige, dass dann die QR-Zerlegung $A = QR$ mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig ist, bis auf Vorzeichen von Zeilen und Spalten. **6 Punkte**

4. Potenzmethode, Programmieraufgabe. Man programmiere die Potenzmethode. Damit approximiere man den betragsgrößten Eigenwert der Matrix

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \{-30, 30\}$. Als Startwert der Iteration nehme man den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_1$ und die Iteration soll beendet werden, falls für die Iterierten gilt

$$\frac{|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|}{|\lambda^{(k+1)}|} < 10^{-10}.$$

Wieviel Iterationen werden jeweils benötigt? Durch welche Aussage aus der Vorlesung kann der Unterschied in der Anzahl der Iterationen begründet werden? **4 Punkte**

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 14.01.2026, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.