Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 01.12.2025

Numerik I

Übungsserie 07

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Quadraturformel mit Ableitungen der Funktion.* Sei $f \in C^1([0,h])$.

   (a) Man bestimme die Gewichte λ_i, $i \in \{0,1,2,3\}$, so, dass
   $$\int_0^h f(x)\ dx = h\left(\lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(h)\right) + h^2\left(\lambda_2 f'(0) + \lambda_3 f'(h)\right)$$
   für alle Polynome $p = f$ vom Grad kleiner oder gleich 3 ist.

   (b) Man leite anschließend eine Quadraturformel $\tilde{I}_h(f)$ zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\ dx$ basierend auf den Stützstellen
   $$z_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{m}, \quad 0 \le k \le m,$$
   her und zeige, dass $\tilde{I}_h(f)$ die Gestalt
   $$\tilde{I}_h(f) = T_h(f) - \frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right)$$
   besitzt, wobei $T_h(f)$ die summierte Trapezregel angewandt auf f bezeichnet.

   3 Punkte

2. *Höhere Konvergenzordnung für Newton-Cotes-Formeln mit geradem n.* Betrachte die n-te Newton–Cotes-Formel zur numerischen Quadratur einer Funktion im Intervall $[a,b]$ mit äquidistanten Stützstellen und $x_0 = a$, $x_n = b$. Man zeige, dass für gerades n sogar Polynome vom Grad $n+1$ exakt integriert werden.
   Hinweis: Für ein beliebiges Polynom vom Grad $n+1$ betrachte man den Fehler zum zugehörigen Interpolationspolynom vom Grad n. Dann beweise man, dass die Funktion in diesem Fehler eine ungerade Funktion bezüglich des Invervallmittelpunkts ist. **4 Punkte**

3. *Ordnungsbeschränkung von Quadraturformeln.* Man zeige, dass es keine Quadraturformel
   $$\tilde{I}(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i), \quad x_i \in [a,b],\ x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j,$$
   geben kann, die alle Polynome von Grad $2n+2$ in $[a,b]$ exakt integriert.
   Hinweis: Man konstruiere ein Polynom, für welches die Formel bei keiner Wahl der Gewichte exakt ist. **2 Punkte**

4. *Spline-Interpolation, Programmieraufgabe.* Man schreibe ein Programm zur Berechnung von Interpolierten mittels kubischer Splines. Dabei kann man sich auf die Formeln aus der Vorlesung stützen. Das Programm soll den kubischen Spline zu den Stützstellen und Stützwerten

x_k	-7	-4	-3	-2	-1	0	2	4	7	10
y_k	4	-3	-7	0	2	8	6	-4	5	0

berechnen und diesen dann als Graphik darstellen. Die zwei zusätzlich benötigten Bedingungen an den Spline sind

$$s''(-7) = s''(10) = 0.$$

Hinweis: Bei der Nutzung der Formeln muss man mit den Indizes gegenbenfalls aufpassen, falls die Programmiersprache den Index Null nicht akzeptiert. Für die graphische Darstellung kann man wie folgt vorgehen. Man nimmt sich jedes Teilintervall vor, berechnet etwa zehn äquidistante Stützstellen des Splines und verwende diese Werte zur Erstellung der Graphik. **4 Punkte**

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 10.12.2025, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.