

Berlin, 24.11.2025

Numerik I

Übungsserie 06

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Spline-Interpolation.* Man betrachte den Raum der kubischen Splines mit natürlichen Randbedingungen im Intervall $[0, 2]$, welches in zwei äquidistante Teilintervalle zerlegt ist. Welche der folgenden Funktionen liegen in diesem Raum ?

- (a) $f(x) = x^3 - x^2$,
- (b) $f(x) = x^2(x - 6) - (x - 2)^3$,
- (c) $f(x) = (\max\{0, x - 1\})^3 - 0.5x^3$.

2 Punkte

2. *Spline-Interpolation mit kubischem Spline.* Man berechne den kubischen Spline mit natürlichen Randbedingungen zu den Stützstellen

$$(0, 0), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \quad \left(\frac{2\pi}{3}, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad (\pi, 0),$$

d.h., eine kubische Spline-Interpolation der Sinus-Funktion. Die Rechnungen sind exakt durchzuführen, d.h. nicht mit numerischen Approximationen. Es reicht, den Spline in der Darstellung (3.26) aus dem Skript anzugeben.

6 Punkte

3. *Beispiel von Runge, Programmieraufgabe.* Man betrachte das Beispiel von Runge aus der Vorlesung, Beispiel 3.8.

- (a) Man schreibe ein Programm, welches das Interpolationspolynom für ein äquidistantes Gitter mit $n \in \{2, 10, 20\}$ Intervallen mit Hilfe der Newtonschen Darstellung des Interpolationspolynoms berechnet. Man stelle das Ergebnis graphisch dar.
- (b) Man schreibe ein Programm, welches das Interpolationspolynom für ein Gitter berechnet, bei dem die Stützstellen die Nullstellen des entsprechenden Tschebyscheff-Polynoms 1. Art sind. Hier verwende man $n \in \{2, 10, 50\}$ Intervalle. Man stelle das Ergebnis graphisch dar.
- (c) Man approximiere für alle Interpolationspolynome den Fehler in der Maximumnorm. Dazu zerlege man das Intervall $[-5, 5]$ in 10000 äquidistante Teilintervalle und nehme als Approximation den größten Fehler in den Knoten dieser Zerlegung. Die Werte des Polynoms sollen mit dem Horner-Scheme (Anhang der Vorlesung, siehe Homepage der Vorlesung) berechnet werden.

Was kann man beobachten?

6 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 03.12.2025, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.