Anhang A

Das Horner-Schema

Bemerkung A.1 *Berechnung von Funktionswerten von Polynomen, das Horner*[1]*-Schema.* Es wird ein Schema vorgestellt, mit dessen Hilfe man Funktionswerte eines Polynoms

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{A.1}$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, schnell berechnen kann. Nutzt man den naivsten Weg, jeden Summanden von (A.1) einzeln zu berechnen, so hat man für den i-ten Summanden i Multiplikationen und zum Schluss n Additionen. Damit ist die Anzahl der Flops

$$\sum_{i=0}^{n} i + n = \frac{n}{2}(n+1) + n = \frac{n^2}{2} + \frac{3}{2}n.$$

Günstiger ist bereits, wenn man die Potenzen von x zwischendurch speichert:

$p = a_0 + a_1 x$
$t = x$
`for` $i = 2 : n$
  $t = tx$
  $p = p + a_i t$
`end`

Dieser Weg benötigt n Additionen und $(2n-1)$ Multiplikationen, also $3n-1$ Flops.

Die Darstellung (A.1) ist nicht die einzig mögliche für ein Polynom. Äquivalent dazu ist

$$p_n(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x\left(\ldots + x\left(a_{n-1} + a_n x\right)\ldots\right)\right)\right). \tag{A.2}$$

Nutzt man (A.2), so kann man $p_n(x)$ mit n Additionen und n Multiplikationen, also $2n$ Flops berechnen. Man nennt (A.2) auch eingebettete Multiplikation und (A.2) ist die Basis des sogenannten Horner-Schemas (synthetische Division) zur Berechnung von $p_n(z)$:

$b_n = a_n$
`for` $i = n-1 : -1 : 0$
  $b_i = a_i + b_{i+1} z$
`end`

[1] William George Horner (1786 – 1837)

Für $n = 3$ erhält man beispielsweise

$$p_3(z) = \underbrace{a_0 + z\underbrace{\left(a_1 + z\underbrace{\left(a_2 + \underbrace{a_3}_{b_3} z\right)}_{b_2}\right)}_{b_1}}_{b_0}.$$

Dieses Verfahren, veröffentlich von Horner (1818), findet man schon bei Newton über 100 Jahre früher. Damals hat man das Verfahren handschriftlich durchgeführt und dabei folgendes Schema entwickelt:

$$\begin{array}{c|cccccc} p_n & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ z & - & b_n z & b_{n-1} z & \ldots & b_2 z & b_1 z \\ \hline & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{array}$$

Das ist das sogenannte Horner-Schema. □

Beispiel A.2 *Horner-Schema.* Berechne $p_3(z) = -2z^3 + 20z^2 - 2z - 13$ an der Stelle $z = 3$:

$$\begin{array}{c|cccc} p_3 & -2 & 20 & -2 & -13 \\ 3 & & -6 & 42 & 120 \\ \hline & -2 & 14 & 40 & 107 \end{array}$$

Es ist $p_3(3) = 107$. □

Bemerkung A.3 *Erweitertes Horner-Schema.* Man kann das Polynom $p_n(x)$ eindeutig zerlegen in

$$p_n(x) = p_0 + (x - z)\, p_{n-1}(x),$$

wobei p_0 eine Konstante ist und $p_{n-1}(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ (Polynomdivision). Setzt man $x = z$, so folgt $p_n(z) = b_0 = p_0$, also folgt

$$p_{n-1}(x) = \frac{p_n(x) - b_0}{x - z}.$$

Man findet durch Nachrechnen *Übungsaufgabe*

$$p_{n-1}(x) = b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1} =: q_{n-1}(x).$$

Einsetzen führt zu der Darstellung

$$p_n(x) = b_0 + (x - z)\, q_{n-1}(x). \tag{A.3}$$

Manchmal benötigt man nicht nur den Funktionswert eines Polynoms an einer Stelle z, sondern auch noch den Wert der ersten oder noch höherer Ableitungen an derselben Stelle, beispielsweise beim Newton-Verfahren. Aus (A.3) folgt

$$p_n'(x) = q_{n-1}(x) + x q_{n-1}'(x) - z q_{n-1}'(x),$$

also

$$p_n'(z) = q_{n-1}(z).$$

Diesen Wert kann man gemeinsam mit $p_n(z)$ mit dem erweiterten Horner-Schema berechnen:

p_n	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
z	–	$b_n z$	$b_{n-1} z$	$\dots$	$b_2 z$	$b_1 z$
p_{n-1}	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	$b_0 = p_n(z)$
z	–	$c_n z$	$c_{n-1} z$	$\dots$	$c_2 z$	
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\dots$	$c_1 = p_n'(z)$	

Dieses Vorgehen kann man erweitern, um alle Ableitungen von $p_n(x)$ an der Stelle z zu berechnen, was vollständiges Horner-Schema genannt wird, siehe Literatur. □

Beispiel A.4 *Erweitertes Horner-Schema.* Berechne $p_4(z)$, $p_4'(z)$ für

$$p_4(x) = 3x^4 - 5x^2 + 26x - 17, \quad z = 2.$$

p_4	3	0	-5	26	-17
2	–	6	12	14	80
p_3	3	6	7	40	63
2	–	6	24	62	
	3	12	31	102	

Damit sind $63 = p_4(2)$ und $p_4'(2) = 102$. □