# Kapitel 6

# Anfangswertprobleme

## 6.1 Einführung

**Bemerkung 6.1** *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme.* Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen eine Funktion einer skalaren Variablen $y(x)$ gesucht ist, welche eine Gleichung der Form

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{6.1}$$

erfüllt. Differentialgleichungen erhält man bei der Modellierung von Prozessen aus der Natur und der Wirtschaft.

Um eine konkrete Lösung von Differentialgleichungen vom Typ (6.1) zu berechnen, braucht man noch Zusatzinformationen. Sind geeignete Daten zu einem gewissen Punkt $x_0$ gegeben, so spricht man von Anfangswertproblemen. □

**Beispiel 6.2** *Die Schwingungsdifferentialgleichung.* Betrachte die Schwingung einer Feder. Es bezeichne, bereits als entdimensionierte (ohne physikalische Einheit) Größen,

- $t$ – Zeit,
- $y(t)$ – Ort,
- $y'(t)$ – Geschwindigkeit,
- $y''(t)$ – Beschleunigung,
- $y_0$ – Ursprungslage der Feder im Nullpunkt des Koordinatensystems $t = 0$.

Aus dem Newtonschen Gesetz $F = ma$ folgt mit $m = 1$, $a = y''(t)$, der Federkonstanten $\beta > 0$ und der Reibungskonstanten $\alpha > 0$

$$y''(t) = \underbrace{-\beta y(t)}_{\text{Rückstellkraft}} \underbrace{-\alpha y'(t)}_{\text{Reibungskraft}} \underbrace{+g(t)}_{\text{äußere Kraft}} . \tag{6.2}$$

Das ist die Schwingungsdifferentialgleichung. Hier wird in (6.2) der Fall $g(t) = 0$ betrachtet.

Bei der Federschwingung sind zwei grundsätzlich unterschiedliche Situationen möglich:

1. Die Reibungskraft ist groß im Vergleich zur Federkraft. Dann wird die Feder nicht wirklich schwingen, sondern sich einfach in ihre Ursprungslage $y_0$ zurückbegeben.
2. Die Reibungskraft ist klein im Vergleich zur Federkraft. Dann wird man eine (gedämpfte) Schwingung erhalten.

*1. Fall: große Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft.* Man macht den Ansatz für eine exponentiell abklingende Funktion

$$y(t) = ae^{bt}, \quad b < 0,\ a \neq 0.$$

Einsetzen dieses Ansatzes in (6.2) ergibt

$$ab^2e^{bt} = -\beta ae^{bt} - \alpha abe^{bt} = -a(\beta + \alpha b)e^{bt}.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls

$$b^2 = -(\beta + \alpha b) \quad \Longleftrightarrow \quad b_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}.$$

Da $b$ reell sein soll, erhält man damit eine mathematische Bedingung dafür, dass die Reibungskraft groß im Vergleich zur Federkraft ist:

$$\frac{\alpha^2}{4} \geq \beta.$$

Im Fall, dass die Gleichheit in dieser Beziehung nicht gilt, erhält man zwei negative Lösungen für $b$, also auch zwei Lösungen aus dem Ansatz. Man rechnet leicht nach, dass jede Linearkombination eine Lösung von (6.2) ist

$$y(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}, \; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

Es wird gezeigt, dass diese Kurve höchstens eine Nullstelle besitzt. Umstellen der Nullstellengleichung ergibt

$$1 = -\frac{a_2}{a_1} e^{(b_2 - b_1)t}, \quad a_1 \neq 0.$$

Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion kann es höchstens einen Wert $t$ geben, der diese Gleichung erfüllt. In Abbildung 6.1 ist eine mögliche Lösung im Falle der Anfangsauslenkung $y(0) = 1$ dargestellt, für die Parameter $\alpha = 3, \beta = 1, a_1 = -1, a_2 = 2$.

Im Fall der Gleichheit $\alpha^2/4 = \beta$ kann man nachrechnen, dass neben $e^{-\alpha t/2}$ auch $te^{-\alpha t/2}$ eine Lösung von (6.2) ist und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(t) = (a_1 + a_2 t)\, e^{-\alpha t/2}, \; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

Beide Fälle werden als aperiodischer Kriechfall bezeichnet.

*2. Fall: kleine Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft.* In diesem Fall wird man eine gedämpfte Schwingung erwarten. Die Dämpfung kann man wieder mit einer Exponentialfunktion beschreiben und die Schwingung mit einer Winkelfunktion. Ein geeigneter Ansatz ist

$$y(t) = e^{at}\left(c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)\right), \quad a < 0, b \neq 0.$$

Man schreibt diesen Ansatz zunächst in anderer Form. Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^+$. Setzt man $c_1 = A\cos\lambda$, $c_2 = A\sin\lambda$, so erhält man mit einem Additionstheorem für die Kosinusfunktion

$$y(t) = Ae^{at}\left(\cos\lambda\cos(bt) + \sin\lambda\sin(bt)\right) = Ae^{at}\cos(bt - \lambda).$$

Einsetzen in (6.2) liefert

$$Ae^{at}\Big((a^2 - b^2 + \alpha a + \beta)\cos(bt - \lambda) - b(2a + \alpha)\sin(bt - \lambda)\Big) = 0.$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn der letzte Faktor für alle $t$ verschwindet, also wenn

$$a = -\frac{\alpha}{2}, \quad b = \pm\sqrt{a^2 + \alpha a + \beta} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} + \beta} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha^2}{4} + \beta}.$$

gelten. Die Lösung ist eine gedämpfte Schwingung, siehe in Abbildung 6.1 für $\alpha = 0.1, \beta = 3, \lambda = 1, A = 2$ und den Anfangswert $y(0) = 1$.

In beiden Fällen stellt man fest, dass man aus dem gegebenen einen Anfangswert noch keine Lösung des Anfangswertproblems bestimmen kann, da man zwei unbekannte Koeffizienten festlegen muss. Dazu braucht man beispielsweise zwei Bedingungen für den Anfangspunkt, zum Beispiel für $y(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $y'(0)$. □

**Bemerkung 6.3** *Allgemeine Situation.* Im Allgemeinen kann man eine Differentialgleichung nur in Spezialfällen analytisch lösen. Generell kann man jedoch Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (6.1) mit geeigneten Anfangsbedingungen untersuchen. Zudem kann man sich mit Hilfe von numerischen Näherungsverfahren eine Vorstellung von der Gestalt der Lösung verschaffen, obwohl man keine explizite Formel für diese besitzt. □

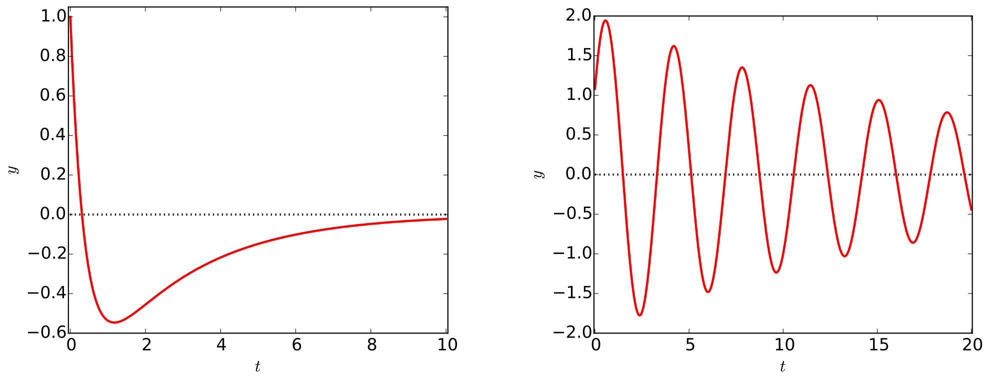


Abbildung 6.1: Beispiele für Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung, links: aperiodischer Kriechfall, rechts: gedämpfte Schwingung.

## 6.2 Grundbegriffe, einige integrierbare Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

**Bemerkung 6.4** *Inhalt.* Dieses Kapitel behandelt einige Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, bei denen man, teilweise nur in Spezialfällen, die Lösung analytisch berechnen kann. Weitere Typen finden Interessenten im Anhang C. □

### 6.2.1 Definitionen und Beispiele

**Definition 6.5 Gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung wird von erster Ordnung genannt, wenn in ihr keine höhere Ableitung von $y(x)$ als die erste Ableitung vorkommt. Die allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung lautet

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0.$$

Eine Funktion $y(x)$ ist Lösung dieser Gleichung in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wenn $y(x)$ in $I$ differenzierbar ist und $F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung wird explizit genannt, wenn man sie in der Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x, y(x)) \tag{6.3}$$

schreiben kann, wobei $f(x, y)$ eine auf einer Menge $G$ der $(x, y)$-Ebene erklärte reellwertige Funktion ist. Eine Funktion $y\ :\ I \to \mathbb{R}$ ist Lösung von (6.3), wenn $y(x)$ in $I$ differenzierbar ist und für alle $x \in I$ gilt

$$\text{ist} \quad (x, y(x)) \in G, \quad \text{dann} \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

□

**Beispiel 6.6** *Organisches Wachstum.* Die absolute Wachstumsrate von Bakterienkulturen auf unerschöpflichem Nährboden ist proportional zur Anzahl $N$ der im Augenblick $t$ vorhandenen Bakterien

$$N'(t) = \alpha N(t). \tag{6.4}$$

Hierbei ist $\alpha$ die relative Wachstumsrate der Bakterienart. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare und demzufolge stetige Funktion. Das steht streng genommen im Widerspruch zur Tatsache, dass $N$ eine natürliche Zahl sein muss. In der Praxis ist $N$ jedoch sehr groß, so dass man mit dem mathematischen Modell, welches durch die Differentialgleichung (6.4) gegeben ist, nur einen kleinen Modellfehler begeht. Die Lösung von (6.4) wird im Abschnitt 6.2.3 behandelt.

Für Ableitungen nach der Zeit verwendet man statt $N'(t)$ auch oft die Bezeichnung $\dot{N}(t)$. □

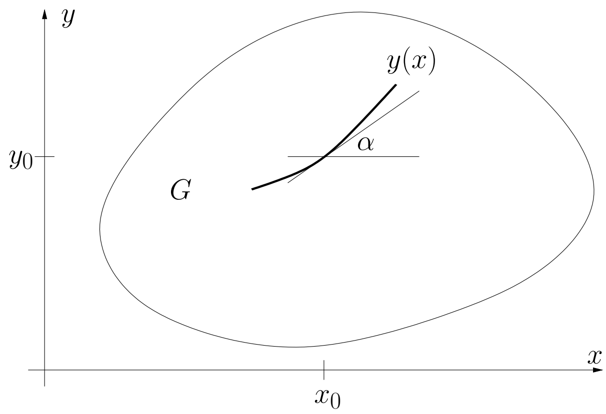


Abbildung 6.2: Skizze zur geometrischen Interpretation.

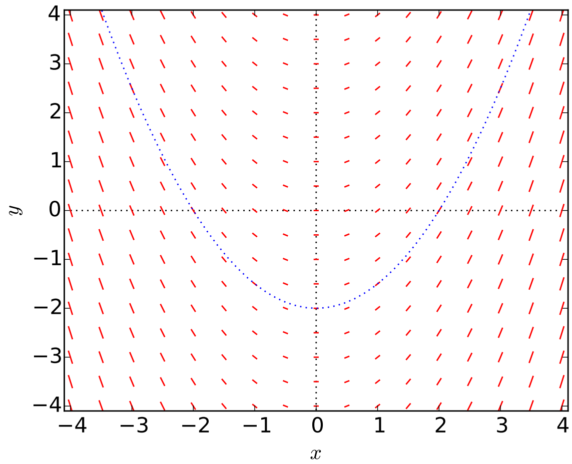


Abbildung 6.3: Beispiel 6.8. Richtungsfeld der Lösung.

**Bemerkung 6.7** *Geometrische Interpretation.* Die explizite Differentialgleichung (6.3) gestattet eine einfache geometrische Interpretation. Geht eine Lösung $y(x)$ von (6.3) durch den Punkt $(x_0, y_0) \in G$, das heißt $y(x_0) = y_0$, so beträgt ihre Steigung an dieser Stelle

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan\alpha,$$

wobei $\alpha$ der Anstiegswinkel ist, siehe Abbildung 6.2.

Man nennt das Tripel $(x_0, y_0, \tan\alpha) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, oder sein geometrisches Äquivalent, Linienelement. Die Gesamtheit aller Linienelemente $(x, y, f(x, y))$ heißt Richtungsfeld. Eine Kurve $y(x)$ erweist sich als Lösung der Differentialgleichung (6.3), wenn sie in das vorgegebene Richtungsfeld passt. Das heißt, in jedem Kurvenpunkt stimmt ihre Tangentenrichtung mit der Richtung des Linienelements überein. □

**Beispiel 6.8** *Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung.* Gesucht sei die Lösung von

$$y'(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit den obigen Bezeichnungen ist $f(x, y) = x$. Diese Funktion ist für konstantes $x$ konstant. Das Richtungsfeld ist in Abbildung 6.3 skizziert.

Die Gesamtheit aller Lösungen einer Differentialgleichung nennt man allgemeine Lösung. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man sieht an diesem Beispiel, dass diese Differentialgleichung zum einen unendlich viele Lösungen besitzt. Zum anderen gibt es für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung, die diesen Punkt enthält.

In der Praxis ist es oft nicht so wichtig, alle Lösungen zu kennen, sondern eine Lösung zu finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft. □

**Definition 6.9 Anfangswertproblem, Anfangswert.** Gegeben sind eine auf einer Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ erklärte Funktion $f(x, y)$ und ein fester Punkt $(x_0, y_0) \in G$. Dann nennt man das Problem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

Anfangswertproblem (AWP). Die Nebenbedingung wird Anfangswert genannt. □

### 6.2.2 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen

**Definition 6.10 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{6.5}$$

nennt man gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen. □

**Beispiel 6.11** *Unbestimmtes Integral.* Ein Spezialfall von (6.5) ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x).$$

Der Lösungsweg für diese Differentialgleichung ist bereits aus der Schule bekannt: unbestimmte Integration. Existiert eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = F(x) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Man spricht anstelle des „Auffindens der Lösung einer Differentialgleichung“ auch oft von der „Integration einer Differentialgleichung“. □

**Satz 6.12 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems.** *Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $g(y)$ sei im Intervall $(c, d) \subset \mathbb{R}$ stetig und es gelte $g(y) \neq 0$ für alle $y \in (c, d)$. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b), \ y_0 \in (c, d), \tag{6.6}$$

*eindeutig lösbar. Seien $G(y)$ die Stammfunktion von $1/g(y)$ mit $G(y_0) = 0$ und $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ mit $F(x_0) = 0$. Dann ist*

$$y(x) = \left(G^{-1} \circ F\right)(x) = G^{-1}(F(x)) \tag{6.7}$$

*die Lösung des gestellten Anfangswertproblems in einer Umgebung von $x_0$. Hierbei ist $G^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von $G(y)$.*

**Beweis:** Für Interessenten.

*i) Eindeutigkeit.* Angenommen, $y(x)$ sei eine Lösung des AWP (6.6) mit $y(x_0) = y_0$. Dann gilt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Da beide Funktionen dieser Gleichung stetig sind, kann man sie integrieren

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{g(y(x))} \, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Da $G(y)$ die Stammfunktion von $1/g(y)$ ist und $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$, erhält man mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$G(y(x)) - \underbrace{G(\underbrace{y(x_0)}_{=y_0})}_{=0} = F(x) - \underbrace{F\,(x_0)}_{=0}. \tag{6.8}$$

Da $1/g(y) \neq 0$ ist, ist $G(y)$ eine streng monotone Funktion. Daraus folgt, dass die Umkehrfunktion $G^{-1}(y)$ existiert. Damit ergibt sich aus (6.8)

$$y(x) = \left(G^{-1} \circ F\right)(x) = G^{-1}(F(x)).$$

Das heißt, existiert eine Lösung des AWP (6.6), so kann man sie in der Form (6.7) darstellen. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Funktionen $F(x)$ und $G(y)$.

*ii) Existenz.* Man zeigt durch nachrechnen, dass (6.7) eine Lösung des AWP (6.6) ist. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) & \overset{\text{Kettenregel}}{=} & \left(G^{-1}\right)'(F(x))\,F'(x) \\ & \overset{\text{Abl.Umkehrfunktion}}{=} & \frac{1}{G'\left(G^{-1}(F(x))\right)}F'(x) \\ & \overset{(6.7)}{=} & \frac{1}{G'(y(x))}F'(x) \\ & \overset{G'(y)=1/g(y)}{=} & \frac{f(x)}{\frac{1}{g(y)}} = f(x)g(y). \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

■

**Beispiel 6.13** *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.* Betrachte

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x}{y(x)}, \quad x \in (a,b),\ y \in (c,d),\ 0 \notin (c,d) \\ y(x_0) &= y_0 \in (c,d). \end{aligned}$$

Mit der obigen Herangehensweise erhält man

$$f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} t\ \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

und

$$g(y) = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g(y)} = y \quad \Longrightarrow \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} t\ \mathrm{d}t = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}.$$

Nach (6.8), oder (6.7) durch Anwendung von $G$ auf beide Seiten, folgt

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}. \tag{6.9}$$

Durch Umstellen erhält man die Lösung

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } c > 0, \\ y &= -\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } d < 0. \end{aligned}$$

Die Wahl von $x$ kann in Abhängigkeit von $(x_0, y_0)$ eingeschränkt sein. Nach (6.9) kann man die Lösung auch in der Form

$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2 =: c_0$$

schreiben. Dies ist eine Hyperbel. Sei $c_0 > 0$, dann hat man für $c > 0$ einen oberen Ast, siehe Abbildung 6.4, und für $d < 0$ einen unteren Ast.

Für $c_0 < 0$ besteht die Lösung aus je einem Teil des linken beziehungsweise des rechten Astes einer Hyperbel. Im Fall $c_0 = 0$ ist die Lösung $y = |x|$ oder $y = -|x|$, jeweils mit $x \neq 0$. □

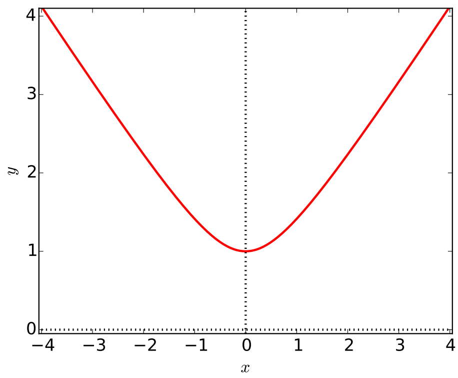


Abbildung 6.4: Beispiel 6.13, oberer Hyperbelast, Lösung im Fall $c > 0$, $c_0 = 1$.

**Bemerkung 6.14** *Methode der Trennung der Variablen.* Man braucht sich die Lösungsformel für das Anfangswertproblem (6.6) nicht zu merken, da es einen einfachen, wenngleich mathematisch nicht ganz exakten, Weg zur Berechnung der Lösung gibt – die Methode der Trennung der Variablen:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = & f(x)g(y) & \text{behandle linke Seite wie einen Bruch} \\[2ex] \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} & = & f(x)\mathrm{d}x & \text{integriere unbestimmt} \\[2ex] \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} & = & \int f(x)\ \mathrm{d}x & \text{finde Stammfunktionen} \\[2ex] G(y) & = & F(x) + c & \text{fasse Integrationskonstanten zusammen} \\ y & = & G^{-1}\left(F(x) + c\right) & \text{löse nach } y \text{ auf.} \end{array}$$

Die Konstante $c$ wird zum Schluss aus der Anfangsbedingung bestimmt. □

**Beispiel 6.15** *Methode der Trennung der Variablen.* Betrachte die Methode der Trennung der Variablen in Beispiel 6.13. Man hat

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = & \frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \\ y\mathrm{d}y & = & x\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \\ \int y\ \mathrm{d}y & = & \int x\ \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \\ \frac{y^2}{2} & = & \frac{x^2}{2} + c. \end{array}$$

Nun hat man zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Anfangsbedingung ergibt

$$\frac{y_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} + c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{2}\left(y_0^2 - x_0^2\right).$$

□

**Bemerkung 6.16** *Der Fall, dass $g(y)$ eine Nullstelle besitzt.* Sei $y_1 \in (c, d)$ mit $g(y_1) = 0$. Dann ist eine Lösung des AWP (6.6) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_1$ sofort durch $y(x) = y_1$ für alle $x \in (a, b)$ gegeben, da dann $g(y) = g(y_1) = 0$ und beide Seiten der Differentialgleichung von (6.6) gleich Null sind. Es kann jedoch passieren, dass es weitere Lösungen dieses AWPs gibt, siehe Übungsaufgaben. □

### 6.2.3 Lineare Differentialgleichungen

**Definition 6.17 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x), \tag{6.10}$$

wobei $f(x), g(x)$ definiert und stetig in $(a, b) \subset \mathbb{R}$ sind, heißt lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Für $g(x) \equiv 0$ spricht man von einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. □

**Bemerkung 6.18** *Zu linearen Differentialgleichungen.*

- Die gewöhnliche Differentialgleichung heißt linear, weil $y'(x)$ und $y(x)$ nur linear auftreten.
- Die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine spezielle Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
- Man sieht sofort, dass $y(x) \equiv 0$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist.

□

**Satz 6.19 Superpositionsprinzip.**

*i) Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, so ist auch jede Linearkombination $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.*

*ii) Sind $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung und $y_h(x)$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, dann ist $y_i(x) + y_h(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.*

*iii) Sind $y_i(x)$ und $\tilde{y}_i(x)$ zwei Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, so ist ihre Differenz Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.*

**Beweis:** Alle Aussagen beweist man durch direktes Nachrechnen.
*i)* Es gilt für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))' + f(x)\,(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\
=\;& c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + f(x)\,(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\
=\;& c_1\underbrace{\left(y_1'(x) + f(x)y_1(x)\right)}_{=0} + c_2\underbrace{\left(y_2'(x) + f(x)y_2(x)\right)}_{=0} = 0,
\end{aligned}$$

da $y_1(x), y_2(x)$ nach Voraussetzung Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind. Man nutzt im Beweis die Linearität der Differentiation und die Linearität der Differentialgleichung.
*ii), iii)* Übungsaufgaben. ■

**Satz 6.20 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.** *Man erhält alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, indem man zu einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y_i(x)$ alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $\{y_h(x)\}$ addiert.*

**Beweis:** Jede Funktion $y_i(x) + \tilde{y}_h(x)$ mit $\tilde{y}_h(x) \in \{y_h(x)\}$ ist nach dem Superpositionsprinzip ii) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Also ist $y_i(x) + \{y_h(x)\}$ eine Teilmenge der Gesamtheit aller Lösungen.

Sei $\tilde{y}_i(x)$ eine beliebige andere Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung. Nach Superpositionsprinzip iii) ist dann $\tilde{y}_i(x) - y_i(x)$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Also gibt es ein $\tilde{y}_h(x) \in \{y_h(x)\}$ mit

$$\tilde{y}_i(x) - y_i(x) = \tilde{y}_h(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \tilde{y}_h(x).$$

Demzufolge lässt sich jede Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung in der oben angegebenen Form darstellen. ■

| |
|---|
| allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung<br>= spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung<br>+ allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung |

**Satz 6.21 Existenz und Darstellung der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.** *Sei $f(x)$ in $(a,b)$ stetig. Es gibt eine Funktion $y_h(x)$ mit $D(y_h) = (a,b)$, $y_h \in C^1(a,b)$, $y_h(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so dass*

$$\{cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$$

*die Gesamtheit aller Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Das ist ein eindimensionaler Unterraum von $C^1(a,b)$. Es gilt*

$$y_h(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t) \ \mathrm{d}t\right)$$

*mit $x_0 \in (a,b)$ beliebig.*

**Beweis:** Für Interessenten.
Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung

$$y_h'(x) + f(x)y_h(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_h'(x) = -f(x)y_h(x).$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Betrachte o.B.d.A. den Fall $y_h(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann hat die Differentialgleichung die Lösung

$$y_h(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t) \ \mathrm{d}t\right)$$

mit $x_0 \in (a,b)$, denn man erhält mit der Kettenregel und der Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze

$$y_h'(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t) \ \mathrm{d}t\right)(-f(x)) = -f(x)y_h(x).$$

Zur Erinnerung: Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze, wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist:

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} f(t) \ \mathrm{d}t = \frac{d}{\mathrm{d}x}\big(F(x) - F(x_0)\big) = F'(x) = f(x),$$

mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Da $f(x)$ stetig ist, ist $y_h(x)$ differenzierbar. Außerdem gilt wegen der Exponentialfunktion $y_h(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Nach dem Superpositionsprinzip ist $\{cy_h(x)\}$ mit $c \in \mathbb{R}$ Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

Es bleibt zu zeigen, dass es neben $\{cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ keine anderen Lösungen gibt. Sei $\tilde{y}_h \in C^1(a,b)$ eine beliebige Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Man setzt

$$\tilde{y}_h(x) = w(x)y_h(x) \quad \Longrightarrow \quad w(x) = \frac{\tilde{y}_h(x)}{y_h(x)}, \ y_h(x) \neq 0.$$

Da $\tilde{y}_h, y_h \in C^1(a,b)$ und $y_h(x) \neq 0$ folgt $w \in C^1(a,b)$. Es ist

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{\tilde{y}_h'(x)y_h(x) - \tilde{y}_h(x)y_h'(x)}{(y_h(x))^2} \\ &\overset{\text{Dgl. einsetzen}}{=} \frac{-f(x)\tilde{y}_h(x)y_h(x) + \tilde{y}_h(x)f(x)y_h(x)}{(y_h(x))^2} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $w(x)$ eine Konstante und $\tilde{y}_h(x) = cy_h(x)$. Es gibt also keine weiteren Lösungen als $\{cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$. ■

**Satz 6.22 Existenz einer Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.** *Seien $f(x), g(x)$ in $(a,b)$ stetig. Dann gibt es eine Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit $D(y_i) = (a,b)$, $y_i \in C^1(a,b)$, so dass $\{y_i(x) + cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist (affine Mannigfaltigkeit mit Trägerpunkt $y_i(x)$).*

**Beweis:** Nutze den Ansatz

$$y_i(x) = c(x)y_h(x),$$

wobei $y_h(x)$ die im Satz 6.21 angegebene Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Dieser Ansatz wird Variation der Konstanten genannt. Man versucht, eine stetig differenzierbare Funktion $c(x)$ so zu bestimmen, dass $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) + f(x)c(x)y_h(x) &= g(x) \quad \Longleftrightarrow \\ c'(x)y_h(x) + c(x)\underbrace{\left(y_h'(x) + f(x)y_h(x)\right)}_{=0} &= g(x). \end{aligned}$$

Damit genügt $c(x)$ der Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$c'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{y_h(t)}\,\mathrm{d}t,\ x_0 \in (a,b).$$

Rücksubstitution liefert

$$y_i(x) = \left(\int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{y_h(t)}\,\mathrm{d}t\right) y_h(x).$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar, da beide Faktoren stetig differenzierbar sind. Nach Konstruktion löst $y_i(x)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Nach dem Superpositionsprinzip und Satz 6.21 ist $\{y_i(x) + cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. ■

**Satz 6.23 Eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems.** *Seien $f(x), g(x)$ in $(a,b)$ stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x), \quad y(x_0) = y_0,\ x_0 \in (a,b),$$

*mit beliebigem $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung.*

**Beweis:** Seien $x_0 \in (a,b)$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Einsetzen der Anfangsbedingung in die im Satz 6.22 angegebene allgemeine Lösung ergibt

$$y_i(x_0) + cy_h(x_0) = y(x_0) = y_0.$$

Mit Hilfe der in den Beweisen von Satz 6.21 und 6.22 konstruierten Darstellung der allgemeinen Lösung folgt

$$0 + c \cdot 1 = y_0 \quad \Longrightarrow \quad c = y_0.$$

Damit ist die Konstante eindeutig bestimmt. ■

**Bemerkung 6.24** *Fazit.*

- Die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung wird mit Trennung der Veränderlichen gelöst.
- Eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung findet man mit der Methode der Variation der Konstanten.
- Ob man die allgemeine Lösung explizit angeben kann, hängt „lediglich“ davon ab, ob man die auftretenden Integrale explizit berechnen kann.
- Ein Anfangswertproblem löst man, indem man zuerst die allgemeine Lösung berechnet und dann in diese die Anfangsbedingung einsetzt.
- Besitzen die Koeffizientenfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ in (6.10) eine „günstige“ Gestalt, so kann man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auch mit einem geeigneten Ansatz gewinnen. Sind $f(x)$ und $g(x)$ beispielsweise Polynome, so setzt man auch $y_i(x)$ als Polynom mit geeignetem Grad an. Diese Herangehensweise nennt man Störgliedansätze, siehe Übungsaufgaben.

□

**Beispiel 6.25** *Lösung eines linearen Anfangswertproblems 1. Ordnung.* Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) + y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 4711.$$

*i) allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.*

$$\begin{aligned} y_h' + y_h &= 0 \quad \Longrightarrow \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y_h} &= -\int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \\ \ln|y_h| &= -x + c_0 \quad \Longrightarrow \\ y_h(x) &= ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*ii) spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Variation der Konstanten.* Der Ansatz ist

$$y_i(x) = c(x)e^{-x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt, mit zweimaliger partieller Integration,

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-x} + \underbrace{c(x)\left(-e^{-x}\right) + c(x)e^{-x}}_{=0} &= \cos(x) \quad \Longrightarrow \\ c'(x) &= e^x \cos(x) \quad \Longrightarrow \\ c(x) &= \int_0^x e^t \cos(t)\ \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \\ c(x) &= \frac{1}{2}e^x\left(\cos(x) + \sin(x)\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz ergibt

$$y_i(x) = c(x)y_h(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Der zweite Term gehört zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Damit erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y_{\text{allg}}(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + c_0 e^{-x}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

*Wichtig: Wenn Zeit ist, die allgemeine Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung kontrollieren.*

*iii) Anfangsbedingung.* Einsetzen in die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt

$$y_{\text{allg}}(0) = \frac{1}{2} + c_0 = 4711 \quad \Longrightarrow \quad c_0 = 4710.5.$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + 4710.5e^{-x}.$$

*Wichtig: Nicht die fertigen Formeln merken, sondern den Weg!!!* □

### 6.2.4 Die Bernoullische Differentialgleichung

**Definition 6.26 Bernoulli[1]sche Differentialgleichung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f_0(x)y^{\alpha}(x) + f_1(x)y(x) \tag{6.11}$$

mit $f_0, f_1 \in C([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, $f_0(x) \not\equiv 0$ heißt Bernoullische Differentialgleichung. □

**Satz 6.27 Transformation der Bernoullische Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.** *Ist $y(x)$ eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung* (6.11) *mit $y(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so genügt*

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

[1] Jakob Bernoulli (1654 – 1705)

*der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung*

$$z'(x) = (1-\alpha)\left(f_0(x) + f_1(x)z(x)\right). \tag{6.12}$$

*Umgekehrt erhält man aus jeder Lösung $z(x)$ von (6.12) mit $z(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ durch*

$$y(x) = z^{1/(1-\alpha)}(x)$$

*eine Lösung von (6.11).*

*Das Anfangswertproblem zu (6.11) mit $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, ist eindeutig lösbar, falls $y_0 > 0$ ist.*

**Beweis:** Für Interessenten.
Aus (6.11) folgt durch Division mit $y^\alpha(x) > 0$

$$\begin{aligned}(1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) &= \left(f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x)\right)(1-\alpha) \quad \Longleftrightarrow \\ \left(y^{1-\alpha}\right)'(x) &= \left(f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x)\right)(1-\alpha).\end{aligned}$$

Setze $z(x) = y^{1-\alpha}(x) > 0$. Daraus folgt mit (6.11)

$$z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) = (1-\alpha)\left(f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x)\right) = (1-\alpha)\left(f_0(x) + f_1(x)z(x)\right).$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Da alle Umformungen äquivalent waren folgt, dass falls $y(x)$ (6.11) löst, so löst $z(x)$ auch (6.12) und umgekehrt.

Das Anfangswertproblem zu (6.12) mit $z(x_0) = z_0 \in \mathbb{R}^+$ beliebig (da $z(x) > 0$) ist nach Satz 6.23 eindeutig lösbar. Damit ist auch das Anfangswertproblem zu (6.11) mit $y_0 = y(x_0) = z_0^{1/(1-\alpha)} > 0$ eindeutig lösbar. Die Abbildung $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $z_0 \mapsto y_0$ ist bijektiv für $\alpha \neq 1$. Damit hat das Anfangswertproblem zu (6.11) für jedes $y_0 > 0$ eine eindeutige Lösung. ■

**Beispiel 6.28** *Lösung einer Bernoullischen Differentialgleichung.* Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) + 2xy(x) = 2x^3y^3(x), \quad y(0) = 2.$$

Der Ansatz lautet

$$z(x) = y^{-2}(x) = \frac{1}{y^2(x)} \quad \Longrightarrow \quad z'(x) = -2y^{-3}(x)y'(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}\frac{y'(x)}{y^3(x)} + 2\frac{x}{y^2(x)} &= 2x^3 \quad \Longleftrightarrow \\ -\frac{z'(x)}{2} + 2xz(x) &= 2x^3 \quad \Longleftrightarrow \\ z'(x) &= 4xz(x) - 4x^3.\end{aligned}$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

Für die homogene Gleichung erhält man

$$z_h'(x) = 4xz_h(x) \quad \Longrightarrow \quad z_h(x) = ce^{2x^2}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann man mit Variation der Konstanten finden. Der Ansatz ist

$$z_i(x) = c(x)e^{2x^2}.$$

Einsetzen in Differentialgleichung liefert

$$c'(x)e^{2x^2} = -4x^3 \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = -4x^3e^{-2x^2}.$$

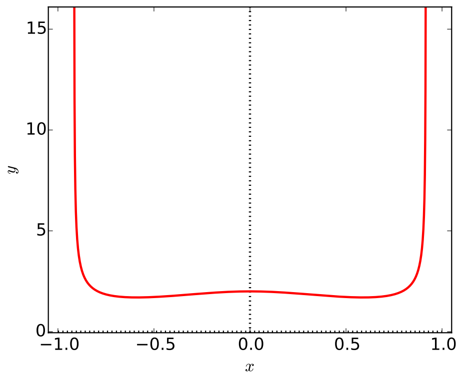


Abbildung 6.5: Lösung des Anfangswertproblems aus Beispiel 6.28.

Zweimalige partielle Integration ergibt

$$c(x) = e^{-2x^2}\left(\frac{1}{2} + x^2\right).$$

Einsetzen in den Ansatz liefert

$$z_i(x) = \frac{1}{2} + x^2 \quad \Longrightarrow \quad z(x) = \frac{1}{2} + x^2 + ce^{2x^2}, \; c \in \mathbb{R}.$$

In diesem Beispiel hätte auch ein Störgliedansatz mit einem quadratischen Polynom schnell zum Ziel geführt.

Für die Lösung des Anfangswertproblems der Bernoullischen Differentialgleichung benötigt man nur die Lösung mit $z(x) > 0$ in einer Umgebung von $x_0 = 0$. Durch Rücksubstitution erhält man

$$y(x) = z^{-1/2}(x) = \left(\frac{1}{2} + x^2 + ce^{2x^2}\right)^{-1/2} > 0.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$y(0) = \left(\frac{1}{2} + c\right)^{-1/2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 4\left(\frac{1}{2} + c\right) \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{1}{4}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} + x^2 - \frac{1}{4}e^{2x^2}\right)^{-1/2},$$

siehe Abbildung 6.5.

Man beachte:

- Der Definitionsbereich von $y(x)$ ist beschränkt.
- Für $y_0 < 0$ ist das Anfangswertproblem nicht lösbar.
- *Wichtig: Substitution* $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ *merken !!!*

□

### 6.2.5 Die Riccatische Differentialgleichung

**Definition 6.29 Riccati[2]sche Differentialgleichung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f_0(x)y^2(x) + 2f_1(x)y(x) + f_2(x) \tag{6.13}$$

mit $f_i \in C(a,b)$, $i \in \{0,1,2\}$, $f_0(x) \not\equiv 0$, heißt Riccatische Differentialgleichung. □

[2] Jacobo Francesco Riccati (1676 – 1754)

**Bemerkung 6.30** *Spezialfälle.* Spezialfälle von (6.13) sind
- $f_0(x) \equiv 0$, lineare Differentialgleichung,
- $f_2(x) \equiv 0$, Bernoullische Differentialgleichung.

□

**Bemerkung 6.31** *Normalform.* Seien $f_1 \in C^1(a,b)$, $f_0 \in C^2(a,b)$ sowie $f_0(x) \neq 0$ in $(a,b)$. Dann kann man die Riccatische Differentialgleichung mittels der Transformation

$$z(x) = f_0(x)y(x) + \frac{1}{2f_0(x)}\left(f_0'(x) + 2f_1(x)f_0(x)\right)$$

in die sogenannte Normalform

$$z'(x) = z^2(x) - f(x) \tag{6.14}$$

mit

$$f(x) = \left(-f_0f_2 + f_1^2 - f_1' + \frac{1}{4f_0^2}\left[4f_0f_0'f_1 + 3(f_0')^2 - 2f_0f_0''\right]\right)(x)$$

überführen (*Übungsaufgabe*). Eine Funktion $y(x)$ ist genau dann Lösung von (6.13) wenn $z(x)$ Lösung von (6.14) ist. □

**Bemerkung 6.32** *Lösbarkeit.* Die Riccatische Differentialgleichung ist im Allgemeinen nicht durch elementare Rechenoperationen und Aufsuchen von Stammfunktionen lösbar. Dies ist nur in folgenden Spezialfällen von (6.14) möglich:
- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ Trennung der Veränderlichen,
- $f(x) = c/x^2$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann führt die Transformation $u(x) = 1/z(x)$ zu

  $$u'(x) = -1 + c\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2.$$

  Das ist eine sogenannte homogene Differentialgleichung, siehe Anhang C.1.
- Der wichtigste Fall ist der Folgende. Ist eine Lösung $z_0(x)$ von (6.14) bekannt, dann können alle weiteren Lösungen durch elementare Rechenoperationen und Aufsuchen der Stammfunktion bestimmt werden. Die allgemeine Lösung lautet

  $$z(x) = z_0(x) + \frac{1}{u_0(x) + cu_1(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

  wobei $u_0(x)$ eine spezielle Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist und $u_1(x)$ Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung.

□

**Satz 6.33 Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems.** *Seien die Voraussetzungen von Bemerkung 6.31 erfüllt. In jedem Intervall $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ existiert höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems der Riccatischen Differentialgleichung* (6.14) *mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = z_0$, $x_0 \in (\alpha,\beta)$.*

**Beweis:** Seien $z_1, z_2 \in C^1(\alpha,\beta)$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Dann erfüllt die Differenz $y(x) = z_1(x) - z_2(x)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= z_1'(x) - z_2'(x) = z_1^2(x) - f(x) - \left(z_2^2(x) - f(x)\right) = z_1^2(x) - z_2^2(x) \\ &= \left(z_1(x) - z_2(x)\right)\left(z_1(x) + z_2(x)\right) =: y(x)\tilde{f}(x) \end{aligned}$$

mit $\tilde{f}(x) := z_1(x) + z_2(x)$ und $y(x_0) = 0$. Man kann sich $\tilde{f}(x)$ als gegebene Funktion denken. Für jede stetige Funktion $\tilde{f}(x)$ erfüllt $y(x)$ das Anfangswertproblem einer linearen Differentialgleichung, welches gemäß Satz 6.23 eindeutig lösbar ist. Die Lösung lautet $y(x) \equiv 0$. ■

**Bemerkung 6.34** *Existenz einer Lösung.* Die Existenz einer Lösung wird später, Folgerung 6.64, bewiesen. □

**Satz 6.35 Konstruktion aller Lösungen mit einer bekannten Lösung.** *Sei* $z_0 \in C^1(a,b)$ *eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung* (6.14) *mit* $f \in C(a,b)$. *Die Funktion* $y \in C^1(\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$, *ist genau dann eine von* $z_0(x)$ *verschiedene Lösung von* (6.14), *das heißt* $y(x) \neq z_0(x)$ *in* $(\alpha,\beta)$, *wenn*

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - z_0(x)} \tag{6.15}$$

*in* $(\alpha,\beta)$ *eine nicht verschwindende Lösung, das heißt* $u(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (\alpha,\beta)$, *der linearen Differentialgleichung*

$$u'(x) + 2z_0(x)u(x) + 1 = 0 \tag{6.16}$$

*ist.*

**Beweis:** Für Interessenten.
Verwende den zu (6.15) äquivalenten Ansatz

$$z_0(x) = y(x) - \frac{1}{u(x)} \quad \Longrightarrow \quad z_0'(x) = y'(x) + \frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

Dieser Ansatz ist wohldefiniert, da $u(x) \neq 0$ in $(\alpha,\beta)$. Einsetzen in (6.14) ergibt

$$\begin{aligned}
y'(x) + \frac{u'(x)}{u^2(x)} &= y^2(x) - \frac{2y(x)}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)} - f(x) \quad \Longrightarrow \\
y'(x) - y^2(x) + f(x) &= \frac{1}{u^2(x)}\left(1 - 2y(x)u(x) - u'(x)\right) \\
&= \frac{1}{u^2(x)}\left(1 - 2z_0(x)u(x) - 2\frac{u(x)}{u(x)} - u'(x)\right) \\
&= -\frac{1}{u^2(x)}\left(1 + 2z_0(x)u(x) + u'(x)\right). \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

*i)* Ist $y(x)$ die Lösung von (6.14), so ist die linke Seite von (6.17) gleich Null und $u(x)$ erfüllt die Differentialgleichung (6.16), da $1/u^2(x) > 0$.

*ii)* Genügt andererseits $u(x)$ der Gleichung (6.16) und ist $u(x) \neq 0$ in $(\alpha,\beta)$, so erfüllt $y(x)$ (6.14) und es gilt $y(x) \neq z_0(x)$ in $(\alpha,\beta)$, da

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

Da $1/u(x) \neq 0$ ist, gilt $y(x) \neq z_0(x)$ für alle $x \in (\alpha,\beta)$. ■

**Bemerkung 6.36 Bestimmung aller Lösungen von** (6.14)**.** Die Bestimmung aller Lösungen von (6.14), im Falle dass eine Lösung bekannt ist, erfolgt wie der Beweis der beiden letzten Sätze, siehe auch das folgende Beispiel. Sei $z_0(x)$ eine bekannte Lösung von (6.14).

- Sei $z_1(x)$ einen andere Lösung von (6.14), dann erfüllt die Differenz $y(x) = z_1(x) - z_0(x)$ die Differentialgleichung

  $$y'(x) = y^2(x) + 2z_0(x)y(x).$$

  Das ist eine Bernoullische Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung man bestimmen kann.
- Oder man verwendet den Ansatz vom Beweis von Satz 6.35:

  $$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)}$$

  und berechnet $u(x)$ durch Lösen von (6.16).

□

**Beispiel 6.37** *Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung.* Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) = y^2(x) - (2x+1)y(x) + (1 + x + x^2),$$

vgl. (Kamke, 1945, S. 43).

*i) Finden einer speziellen Lösung.* Das ist der schwierigste Teil, im Allgemeinen hilft nur scharfes Hinsehen und Probieren. In diesem Beispiel ist $z_0(x) = x$ eine Lösung.

*ii) Ansatz.* Mit dem Ansatz

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

gelangt man hier auch ohne Überführung in die Normalform zu einer linearen Differentialgleichung. Einsetzen in die Differentialgleichung für $y(x)$ ergibt

$$u'(x) = u(x) - 1.$$

*iii) Lösen der linearen Differentialgleichung.* Nur Lösungen ohne Nullstelle sind von Interesse:

$$u(x) = 1 + ce^x, \quad c > 0.$$

*iv) Rücksubstitution.*

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)} = x + \frac{1}{1 + ce^x}, \quad c > 0.$$

Das ist die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung. □

## 6.3 Allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze

### 6.3.1 Allgemeines

**Bemerkung 6.38** *Inhalt.* Man hat bei den Spezialfällen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung aus Abschnitt 6.2 gesehen, dass es immer schwieriger wurde, analytische Lösungen anzugeben. Bei einer allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung wird das nicht mehr möglich sein. Trotzdem kann man auch im allgemeinen Fall Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von zugehörigen Anfangswertproblemen untersuchen.

In diesem Abschnitt werden zwei grundlegende Sätze behandelt:

- Satz von Picard-Lindelöf (sukzessive Approximation, Fixpunktiteration):
  - beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz,
  - Voraussetzung: Stetigkeit und partielle Lipschitz-Bedingung der rechten Seite,
  - Ergebnis: Existenz und Eindeutigkeit.
- Satz von Peano (Polygonzüge):
  - Voraussetzung: Stetigkeit der rechten Seite,
  - Ergebnis: Existenz.

□

**Bemerkung 6.39** *Explizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung.* In diesem Kapitel werden explizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, da Untersuchungen für Systeme nicht anders sind als für eine einzelne Gleichung. Seinen $y_i \; : \; I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i \; : \; D(f_i) = D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann werden die Vektoren

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

definiert. Die betrachteten Systeme haben dann die Form

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \quad \text{oder} \quad y_i'(x) = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \; i = 1, \ldots, n. \tag{6.18}$$

Das zugehörige Anfangswertproblem lautet wie folgt. Gegeben seien $n + 1$ reelle Zahlen $x^{(0)}, y_1^0, \ldots, y_n^0$ mit $(x^{(0)}, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$. Gesucht ist eine Lösung von (6.18) mit $y_i(x^{(0)}) = y_i^0$, $i = 1, \ldots, n$. □