

Kapitel 1

Bestapproximation

1.1 Einführung

Bemerkung 1.1 *Motivation.* Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Von dieser Funktion sei es im Laufe einer numerischen Berechnung notwendig, Funktionswerte an (vielen) unterschiedlichen Stellen $x \in [a, b]$ zu berechnen, wobei die Stellen vor der Rechnung nicht bekannt sind. Ist $f(x)$ eine „einfache“ Funktion, zum Beispiel ein Polynom, bereitet die Berechnung der Funktionswerte keine Schwierigkeiten. Bei Polynomen verwendet man dafür zweckmäßigerweise das Horner-Schema, siehe Anhang A.

Aber schon bei anderen elementaren Funktionen, wie $e^x, \sin(x), \ln(x)$ ist die Berechnung von Funktionswerten für beliebige Argumente x aus dem Definitionsbereich der jeweiligen Funktion schwierig. In diesem Falle ist es zweckmäßig, den gesuchten Funktionswert mit einer vorgegebenen Genauigkeit ε zu approximieren. Dabei ersetzt man die betrachtete Funktion $f(x)$ durch eine Funktion $\varphi(x)$, welche einfacher berechenbar ist (etwa ein Polynom), und deren Werte sich in $[a, b]$ nicht um mehr als ε von den Werten von $f(x)$ unterscheiden.

Zu untersuchende Fragestellungen beinhalten:

- Die Funktion $f(x)$, eine Norm, in der der Fehler berechnet wird, und eine Menge U sind gegeben, wobei $\varphi(x)$ in U gesucht werden soll. Was ist der minimale Wert von ε ? Wie kann man ein $\varphi(x)$ berechnen, für welches der minimale Fehler angenommen wird? Ist $\varphi(x)$ eindeutig?
- Die Funktion $f(x)$, eine Norm, in der der Fehler berechnet wird, und ε sind gegeben. Wie muss man U wählen, damit man ein $\varphi(x)$ findet, so dass der Fehler kleiner oder gleich ε ist?

□

Bemerkung 1.2 *Bestapproximation – abstrakte Aufgabenstellung.* Sei V ein normierter Raum reellwertiger Funktionen, welche über $[a, b]$ definiert sind, zum Beispiel $V = C([a, b])$. Gegeben sei $f \in V$. Weiter sei U eine Menge reellwertiger Funktionen über $[a, b]$, welche nur aus „einfach berechenbaren“ Funktionen besteht. Sei V so groß gewählt, dass $U \subset V$. Des Weiteren bezeichne $\|\cdot\|$ eine Norm auf V . Dann hat die Aufgabe der Bestapproximation die Form: Finde $u \in U$, so dass

$$\|f - u\| \leq \|f - v\| \quad \forall v \in U. \quad (1.1)$$

Bei dieser Aufgabenstellung sind die Wahl von U und die Wahl der Norm $\|\cdot\|$ noch frei. □

Definition 1.3 *Tschebyscheff-Approximation.* Betrachtet man (1.1) für die

Maximumsnorm

$$\|v\|_{C([a,b])} = \|v\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |v(x)|, \quad v \in C([a,b]),$$

so spricht man von Tschebyscheff¹-Approximation. $\square$

Beispiel 1.4 *Tschebyscheff-Approximation.* Seien $[a, b] = [0, \pi]$ und $f(x) = \sin(x)$. Gesucht ist die Tschebyscheff-Approximation in der Menge der konstanten Funktionen über $[a, b]$, $U = P_0([a, b])$. Es sind

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = 0, \quad \max_{x \in [a,b]} f(x) = 1.$$

Die konstante Funktion, deren maximaler Abstand zu beiden Extremwerten minimal ist, ist $u(x) = 1/2$, siehe Abbildung 1.1. Dies ist die Tschebyscheff-Approximation. Dann ist

$$\|\sin(x) - u\|_{\infty} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Definition 1.5 Der Raum $L^2(a, b)$. Der Raum $L^2(a, b)$ besteht aus allen Funktionen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, welche in (a, b) quadratisch (Lebesgue-) integrierbar sind

$$L^2(a, b) = \left\{ f : \int_a^b (f(x))^2 \, dx < \infty \right\}.$$

Der Raum ist ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b (f(x))^2 \, dx \right)^{1/2} = \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

$\square$

Beispiel 1.6 *Bestapproximation in $\|\cdot\|_{L^2}$.* Betrachte die gleiche Ausgangssituation wie im Beispiel 1.4. Nun ist aber diejenige konstante Funktion $u \in P_0([a, b])$ gesucht, für die $\|f - u\|_{L^2}$ minimal wird. Diese Norm ist genau dann minimal, wenn das Quadrat der Norm minimal ist. Dies folgt aus der strengen Monotonie der Wurzelfunktion. Mit binomischer Formel und der Eigenschaft, dass u eine Konstante ist, erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\sin(x) - u)^2 \, dx &= \int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx - 2u \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx + \pi u^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - 4u + \pi u^2. \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Funktion in u , deren Bild (Parabel) nach oben geöffnet ist. Demzufolge besitzt sie ein Minimum, welches man wie üblich berechnet:

$$u = \frac{2}{\pi} \approx 0.63661977236758134308,$$

siehe Abbildung 1.1. Man erhält

$$\|\sin(x) - u\|_{L^2} = \left(\int_0^{\pi} (\sin(x) - u)^2 \, dx \right)^{1/2} = \left(\frac{\pi^2 - 8}{2\pi} \right)^{1/2} \approx 0.5454876555. \quad (1.3)$$

Der Vergleich mit Beispiel 1.4 zeigt, dass die Wahl unterschiedlicher Normen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann. $\square$

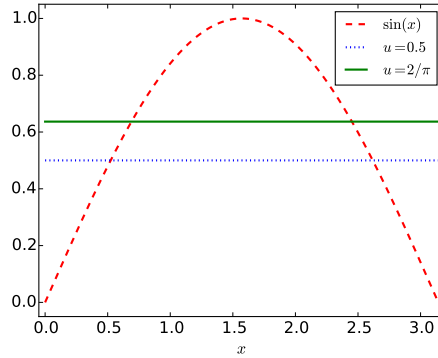


Abbildung 1.1: Beispiel 1.6. Bestapproximation von $\sin(x)$ in $[0, \pi]$: Tschebyscheff-Approximation und Approximation bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$.

Bemerkung 1.7 *Stückweise definierte Funktionen.* In den Beispielen 1.4 und 1.6 wurden Bestapproximierte gesucht, die im gesamten Intervall die gleiche Form besitzen. Die zu approximierende Funktion $f(x)$ kann sich aber in unterschiedlichen Teilintervallen von $[a, b]$ unterschiedlich verhalten. Dann ist es zweckmäßig, sie durch eine stückweise definierte Funktion zu approximieren. $\square$

Definition 1.8 **Der Raum S_n oder P_1 .** Sei das Intervall $[a, b]$ durch ein Gitter mit n Teilintervallen (Gitterzellen) zerlegt (trianguliert)

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dann besteht der Raum S_n aus allen stetigen und stückweise linearen Funktionen (Polygonzügen)

$$S_n = \left\{ f : f \in C([a, b]), f|_{[x_{i-1}, x_i]} \text{ ist linear } \forall i = 1, \dots, n \right\},$$

vergleiche Abbildung 1.2. Soll nicht die Anzahl der Gitterzellen sondern die stückweise Linearität des Raumes hervorgehoben werden, so wird er im Allgemeinen mit P_1 bezeichnet. $\square$

Beispiel 1.9 *Approximation in S_2 mit $\|\cdot\|_{L^2}$.* Betrachte wiederum die Situation von Beispiel 1.6. Man kann zeigen, siehe Beispiel 1.40, dass die Bestapproximation durch eine lineare Funktion $\alpha x + \beta$ in $[a, b]$ gegeben ist durch $\alpha = 0, \beta = 2/\pi$. Das bedeutet, die beste lineare Approximation ist gerade die Konstante aus Beispiel 1.6 und der Approximationsfehler ist durch (1.3) gegeben.

Betrachtet man ein Gitter aus zwei Gitterzellen mit $x_1 = \pi/2$ und den Polygonzug

$$p_2 = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ -\frac{2}{\pi}x + 2, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \in S_2,$$

die sogenannte Knoteninterpolierende, siehe Abbildung 1.3, so erhält man

$$\begin{aligned} & \|\sin(x) - p_2\|_{L^2} \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{2}{\pi}x \right)^2 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\sin(x) + \frac{2}{\pi}x - 2 \right)^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

¹Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (1821 – 1894)

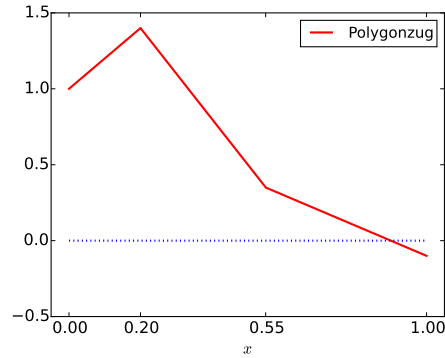


Abbildung 1.2: Funktion aus S_3 bezüglich des Gitters mit den Punkten $\{0, 0.2, 0.55, 1\}$.

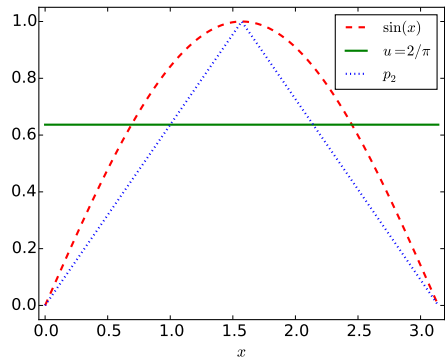


Abbildung 1.3: Beispiel 1.9. Approximation von $\sin(x)$ in $[0, \pi]$: Bestapproximation durch eine konstante (bzw. lineare) Funktion und Approximation durch p_2 .

$$= 0.2674224922.$$

Das ist schon nur noch etwa der halbe Fehler im Vergleich zur Bestapproximation mit einer globalen linearen Funktion. Im Raum S_2 ist es jedoch noch nicht der bestmögliche Wert. Dessen Berechnung wird in Beispiel 1.43 erklärt. $\square$

1.2 Bestapproximation in normierten Räumen und Prä-Hilbert-Räumen

Bemerkung 1.10 *Inhalt.* In diesem Abschnitt werden zunächst Aussagen zur Existenz einer Lösung des Problems der Bestapproximierenden und deren Eindeutigkeit im Rahmen von allgemeinen normierten Räumen vorgestellt. (Prä-)Hilbert-Räume sind spezielle normierte Räume, für die man die Bestapproximierende genauer charakterisieren kann. $\square$

Definition 1.11 Normierter Raum. Ein linearer Raum V heißt normiert, wenn es eine Abbildung $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die folgenden Bedingungen genügt:

- i) $\|v\|_V \geq 0$ für alle $v \in V$, wobei $\|v\|_V = 0$ genau dann, wenn $v = 0$,
- ii) $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \|v\|_V$ für alle $v \in V$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,

iii) Dreiecksungleichung: $\|v_1 + v_2\|_V \leq \|v_1\|_V + \|v_2\|_V$ für alle $v_1, v_2 \in V$. □

Bemerkung 1.12 *Bestapproximations-Aufgabe.* Die allgemeine Aufgabe der Bestapproximation (1.1) wird etwas konkretisiert. Anstelle einer beliebigen Menge U wird nun der Fall betrachtet, dass $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Teilraum ist. Ansonsten ändert sich die Bestapproximations-Aufgabe nicht. Sei $f \in V$ gegeben, finde $u \in U$, so dass

$$\|f - u\|_V \leq \|f - v\|_V \quad \forall v \in U. \quad (1.4)$$

□

Satz 1.13 Existenz einer Lösung der Bestapproximations-Aufgabe. *Die Bestapproximations-Aufgabe (1.4) besitzt eine Lösung.*

Beweis: Definiere die Abbildung $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(v) = \|f - v\|_V$ für alle $v \in U$. Die Funktion $g(v)$ ist wegen $g(v) \geq 0$ nach unten beschränkt. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$|g(v) - g(w)| = \left| \|f - v\|_V - \|f - w\|_V \right| \leq \|v - w\|_V \quad \forall v, w \in U, \quad (1.5)$$

da beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \|f - v\|_V - \|f - w\|_V &= \|(f - w) - (v - w)\|_V - \|f - w\|_V \\ &\leq \|f - w\|_V + \|v - w\|_V - \|f - w\|_V = \|v - w\|_V, \end{aligned}$$

und analog der andere Fall. Da die Norm eine stetige Funktion ist, folgt aus (1.5), dass auch $g(v)$ eine stetige Abbildung ist.

Betrachte nun eine Kugel, welche nur Funktionen aus U bis zu einer bestimmten Norm enthält

$$B = \{v \in U : \|v\|_V \leq 2\|f\|_V\}.$$

Da U ein Unterraum ist, ist $0 \in U$ und offenbar auch $0 \in B$. Zunächst wird gezeigt, dass kein Minimum von $g(v)$ außerhalb von B liegen kann. Betrachte dazu ein $v \in U$ mit $v \notin B$, also $\|v\|_V > 2\|f\|_V$. Dann folgt mit Dreiecksungleichung

$$g(v) = \|f - v\|_V \geq \|v\|_V - \|f\|_V > 2\|f\|_V - \|f\|_V = \|f\|_V = g(0).$$

Es ist auch anschaulich klar, dass der Mittelpunkt der Kugel eine bessere Approximation als v ist, falls v eine Norm hat, die den doppelten Abstand von f zum Mittelpunkt übersteigt.

Somit reduziert sich die Bestapproximations-Aufgabe zu: Finde $u \in B$, so dass

$$g(u) \leq g(v) \quad \forall v \in B.$$

Die Kugel B ist abgeschlossen, da der Rand $\|v\|_V = 2\|f\|_V$ mit zu B gehört, und beschränkt. Nun benötigt man die Eigenschaft, dass U endlich-dimensional ist. In endlich-dimensionalen Räumen ist eine abgeschlossene und beschränkte Menge auch kompakt. Nach dem Satz von Weierstraß²⁾ nimmt eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihre Extremwerte an. Damit existiert ein $u \in B$, so dass

$$g(u) = \inf_{v \in B} g(v) = \min_{v \in B} g(v) = \min_{v \in U} g(v)$$

ist. ■

Bemerkung 1.14 *Zum Beweis.* Der Beweis ist nicht konstruktiv, das heißt, es wird nicht angegeben, wie eine Lösung konstruiert werden kann. □

²Karl Weierstraß (1815 – 1897)