

Berlin, 01.07.2024

Numerik I

Übungsserie 11 (letzte Übungsserie)

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Modellierung mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung.* Ein Motorboot bewegt sich bei ruhigem Wasser mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 20 km/h . Bei dieser Geschwindigkeit wird der Motor abgeschaltet und innerhalb von 30 Sekunden verringert sich die Geschwindigkeit des Bootes auf 7 km/h . Es wird angenommen, dass der Widerstand des Wassers das Boot proportional zu seiner Geschwindigkeit bremst. Man berechne die Geschwindigkeit des Bootes 3 Minuten nach dem Ausschalten des Motors! Welchen Weg legt das Boot in der ersten beiden Minuten nach dem Ausschalten des Motors zurück?

4 Punkte

2. *Integrierbare Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.*

(a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'(x) - 4y(x) - x^2\sqrt{y(x)} = 0.$$

(b) Man löse das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{-x+2}{x(1-x)}y(x) + \frac{1}{x^2(x-1)}y^2(x), \quad y(2) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

5 Punkte

3. *Integrierbare Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.* Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$4y'(x) + y^2(x) + 4x^{-2} = 0.$$

Diese besitzt eine Lösung der Form $z_0(x) = \frac{a}{x}$.

4 Punkte

4. *Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf.* Man approximiere die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} (1+x)y'(x) + y(x) &= (1+x)^{-1}, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

mit dem Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Ausgehend vom Startwert berechne man vier Iterierte. Für die letzte Iterierte berechne man den Betrag des Fehlers zur analytischen Lösung

$$y(x) = \frac{\ln(x+1) + 1}{1+x}$$

für $x = 0.5$.

3 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Montag, 08.07.2024, 10:00** abzugeben, entweder in das Fach des Tutors oder elektronisch in whiteboard.