

Berlin, 17.06.2024

Numerik I

Übungsserie 09

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Absolute Kondition der Bestimmung von Nullstellen.* Seien $f \in C^n([a, b])$ und $x_0 \in (a, b)$ eine n -fache Wurzel (Nullstelle) von

$$f(x) - \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

aber keine $(n + 1)$ -fache Wurzel.

- (a) Man betrachte eine kleine Störung ε der Daten α und zeige, dass für die absolute Kondition K dieses Problems gilt

$$K \approx \left| \frac{n!}{f^{(n)}(x_0)} \right| \varepsilon^{1/n-1}.$$

Was folgt daraus, wenn die Störung beliebig klein wird?

- (b) Die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms, was man beispielsweise braucht, wenn man die Eigenwerte einer Matrix mit Hilfe des charakteristischen Polynoms berechnen will, ist ein Spezialfall der obigen Aufgabe. Sei $f(x)$ nun ein Polynom n -ten Grades mit der n -fachen Nullstelle x_0 . Wie lässt sich die Aussage des ersten Teils verschärfen?

Hinweis: Für den ersten Teil verwende man eine Taylor-Entwicklung von $f(x)$ in x_0 und approximiere den Term mit der unbekanntem Zwischenstelle durch den gleichen Term an der Stelle x_0 . **4 Punkte**

2. *Gerschgorin-Kreise.* Man schätze mit Hilfe von Gerschgorin-Kreisen die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

ab. Man stelle die Lösung graphisch dar. **2 Punkte**

3. *Eindeutigkeit der QR-Zerlegung.* Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit Vollrang. Man zeige, dass dann die QR-Zerlegung $A = QR$ mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eindeutig ist, bis auf Vorzeichen von Zeilen und Spalten. **6 Punkte**

4. Potenzmethode, Programmieraufgabe. Man programmiere die Potenzmethode. Damit approximiere man den betragsgrößten Eigenwert der Matrix

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \{-30, 30\}$. Als Startwert der Iteration nehme man den Einheitsvektor e_1 und die Iteration soll beendet werden, falls für die Iterierten gilt

$$\frac{|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|}{|\lambda^{(k+1)}|} < 10^{-10}.$$

Wieviel Iterationen werden jeweils benötigt? Durch welche Aussage aus der Vorlesung kann der Unterschied in der Anzahl der Iterationen begründet werden? **4 Punkte**

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Montag, 24.06.2024, 10:00** abzugeben, entweder in das Fach des Tutors oder elektronisch in whiteboard.