Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 10.06.2024

Numerik I

Übungsserie 08

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Nullstellen von p_{n+1}.* Sei p_{n+1} das in Lemma 4.14 definierte Polynom. Man zeige, dass dieses Polynom $n+1$ paarweise verschiedene reelle Nullstellen in (a, b) besitzt.
   Hinweis: Man zeige zunächst, dass es wenigstens eine Nullstelle in (a, b) gibt und betrachte dann ein Polynom, welches die gleichen Nullstellen wie p_{n+1} besitzt. **3 Punkte**

2. *Quadraturformeln in Tensorproduktgebieten.* Seien $I_1 = [a_1, b_1]$ und $I_2 = [a_2, b_2]$, dann ist das durch diese Intervalle definierte Tensorproduktgebiet in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

   $$\Omega = I_1 \times I_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in I_1, y \in I_2\right\}.$$

   Seien Quadraturformeln für I_1 mit den Stützstellen $\{x_i \in I_1\}_{i=0}^m$ und Gewichten $\{\lambda_i\}_{i=0}^m$ sowie für I_2 mit den Stützstellen $\{y_j \in I_2\}_{j=0}^n$ und Gewichten $\{\kappa_j\}_{j=0}^n$ gegeben, gemäß Formel (4.9) aus dem Skript.

   i) In Ω kann man damit eine Quadraturformel mit den Stützstellen $\{x_i, y_j\}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$ herleiten. Welche Gestalt besitzen die zugehörigen Gewichte?

   ii) Sei $I_1 = I_2 = [0, 1]$ und die Quadraturformel für beide Intervalle sei die Trapezregel. Man gebe die resultierende Quadraturformel in Ω an. Dann approximiere man

   $$\int_\Omega x^3 y^3 \ dxdy$$

   und berechne den Betrag des Fehlers.

   iii) Die Aufgabenstellung ist wie in ii), nur dass die Quadraturformel für beide Intervalle die Gauß-Legendre-Formel für $n = 1$ ist. Hierfür leite man die Stützstellen und die Gewichte für diese Formel im Intervall $[0, 1]$ analog zu Beispiel 4.21 aus dem Skript her.

   Alle Rechnungen sind in exakter Arithmetik durchzuführen. **6 Punkte**

3. *Romberg-Verfahren und Simpson-Regel.* Jedes Element $P_{k,j}$, $k = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, k$, des Romberg-Verfahrens lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Man bestimme k und j so, dass $P_{k,j}$ den gleichen Wert ergibt wie derjenige, den man mit der summierten Simpson-Regel erhält. **3 Punkte**

4. *Romberg-Verfahren, Programmieraufgabe.* Der Wert von

$$\int_{-1}^{1} \frac{(x-0.5)^3}{\sqrt{x+8}}\, dx$$

soll mit Hilfe des in der Vorlesung eingeführten Romberg-Verfahrens approximiert werden. Dafür schreibe man ein Programm.

Das Integrationsgebiet soll in $1, 2, 4, \dots, 64$ Intervalle zerlegt werden. Die Fehler zum exakten Integralwert

$$\frac{12371}{20}\sqrt{7} - \frac{229179}{140}$$

sowie das Schema des Romberg-Verfahrens, analog zu Beispiel 4.31 aus dem Skript, sind anzugeben. **4 Punkte**

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Montag, 17.06.2024, 10:00** abzugeben, entweder in das Fach des Tutors oder elektronisch in whiteboard.