Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 13.05.2024

Numerik I

Übungsserie 05

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Hessenberg-Matrix.* Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche nur im oberen Dreieck sowie in der ersten unteren Diagonalen von Null verschiedene Einträge besitzt, wird (obere) Hessenberg-Matrix genannt. Diese Matrizen kann man mit Givens-Drehungen effizient auf Dreiecksform bringen.

   Man bringe die obere Hessenberg-Matrix

   $$H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   mittels Givens-Drehungen auf Dreiecksgestalt (Genauigkeit: vier Stellen nach dem Komma). **3 Punkte**

2. *Wiederholung Polynominterpolation.*

   (a) Man zeige

   $$\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n+1}'(x_i)} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j},$$

   wobei $\omega_{n+1}(x)$ das Knotenpolynom

   $$\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

   ist.

   (b) Gegeben sind die drei Punkte $(-2,3)$, $(-1,10)$ und $(1,5)$. Man berechne das Interpolationspolynom 2. Grades durch diese Punkte.

   2+2 Punkte

3. *Hermite-Interpolation.*

   (a) Man bestimme das Hermite-Interpolationspolynom $p \in P_3$, welches den Bedingungen

   $$p(-1) = -13, \quad p'(-1) = 14, \quad p''(-1) = -22, \quad p'''(-1) = 18$$

   genügt.

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, und $c_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$. Man zeige, dass das Hermite-Interpolationspolynom auf $[-1, 1]$ zu den Bedingungen

$$p^{(i)}(-1) = c_i, \quad p^{(i)}(1) = (-1)^i c_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

im Raum $U = \operatorname{span}\left\{1, x^2, \ldots, x^{2n}\right\}$ liegt und eindeutig bestimmt ist.

2+4 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Montag, 27.05.2024, 10:00** abzugeben, entweder in das Fach des Tutors oder elektronisch in whiteboard.