



ÜBUNGSBLATT 9

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1. Die Polizei will mit Hilfe eines Schnelltests überprüfen, ob der Blutalkoholgehalt eines Autofahrers mindestens 0,5 Promille oder (strikt) weniger als 0,5 Promille beträgt. Der Testhersteller bescheinigt, dass der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ein positives Ergebnis liefert, wenn der Blutalkoholgehalt des Getesteten mindestens 0,5 Promille beträgt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% fällt der Test negativ aus, wenn der Gehalt (strikt) geringer als 0,5 Promille ist. Die Polizei weiß aus Erfahrung, dass 5% der Autofahrer mindestens mit 0,5 Promille Blutalkoholgehalt unterwegs sind.
 - a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einem zufällig ausgewählten Autofahrer positiv ausfällt?
 - b) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein getesteter Fahrer in Wahrheit (strikt) weniger als 0,5 Promille Blutalkohol hat, wenn sein Test positiv ausfällt?
 - c) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein getesteter Fahrer in Wahrheit mindestens 0,5 Promille Blutalkohol hat, obwohl sein Test negativ ausfällt?

(4 Punkte)

2. Wir betrachten zwei Begriffe für die Konvergenz von Zufallsgrößen $X_1, X_2, \dots$ gegen X auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

$$X_n \rightarrow XP\text{-f.s. (fast sicher)} : \iff P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ (in Wahrscheinlichkeit)} : \iff \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

Zeigen Sie:

- a) $X_n \xrightarrow{P} X$ und $X_n \xrightarrow{P} Y$ implizieren $P(X = Y) = 1$, d.h. der Grenzwert von in Wahrscheinlichkeit konvergierenden Zufallsvariablen ist P -f.s. eindeutig bestimmt.
- b) Gilt $X_n \rightarrow XP\text{-f.s.}$, so folgt daraus $X_n \xrightarrow{P} X$.
- c) Die Umkehrung gilt nicht, d.h. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert nicht die fast sichere Konvergenz.

Hinweis: Betrachten Sie $X_n \sim B(1, p_n)$ mit geeigneten Parametern p_n ($n \in \mathbb{N}$).

Bemerkung: In der Literatur werden die Begriffe *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit*, *Konvergenz nach Maß* und *stochastische Konvergenz* synonym verwendet. (4 Punkte)

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = -n) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = n^3 - n) = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X_n für $n \in \mathbb{N}$.
b) Zeigen Sie, dass $\frac{X_n}{n} \rightarrow -1$ P -f.s. für $n \rightarrow \infty$ und folgern Sie daraus, dass

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - E[X_k]) \rightarrow 0\right) = 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(4 Punkte)

4. Seien $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap (0, 1]$ und $P = \lambda^1|_{(0,1]}$ (das auf Ω eingeschränkte Lebesgue-Maß). Zeigen Sie mit Hilfe der angegebenen Folgen, dass Konvergenz in Wahrscheinlichkeit keine Aussage über die Konvergenz des Erwartungswertes erlaubt. Mit anderen Worten: Bestimmen Sie den Grenzwert in Wahrscheinlichkeit der gegebenen Folge, berechnen Sie den Erwartungswert des n -ten Folgengliedes und den Limes der Folge der Erwartungswerte.

- a) $X_n := n \cdot 1_{(0, \frac{1}{n}]}$
b) $Y_n := n^2 \cdot 1_{(0, \frac{1}{n}]}$

(4 Punkte)

Abgabe: 15. Juni in der Vorlesung