Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 8

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1. Seien U_1, U_2 unabhängige, $U(0,1)$ verteilte Zufallsvariablen. Wir definieren Zufallsvariablen X_1, X_2 durch $X_1 = \rho\cos\theta$, $X_2 = \rho\sin\theta$ mit $\theta = 2\pi U_2$, $\rho = \sqrt{-2\log U_1}$. Zeigen Sie, dass $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$, wobei I_2 die 2-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. *(4 Punkte)*

2. Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $c \geq 0$ eine deterministische Zahl. Eine Zufallsvariable $Y = Y_c$ wird definiert durch
$$Y_c(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & |X(\omega)| < c, \\ -X(\omega), & |X(\omega)| \geq c. \end{cases}$$
Zeigen Sie:
   (i) Für jedes c ist $Y_c \sim \mathcal{N}(0,1)$;
   (ii) Für kein c sind X und Y_c unabhängig;
   (iii) Es gibt ein $c \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass X und Y_c unkorreliert sind.

   (4 Punkte)

3. Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$, $p_n := \mu(\{n\})$, $q_n := \nu(\{n\})$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die *Faltung* $\mu * \nu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$ definiert durch
$$(\mu * \nu)(\{n\}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} p_m q_{n-m}.$$
   a) Sind X und Y unabhängige, $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariable, dann gilt $P_{X+Y} = P_X * P_Y$.
   b) Seien X und Y unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern μ und λ. Dann ist $X + Y$ Poisson-verteilt mit Parameter $\mu + \lambda$.

   (4 Punkte)

4. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbare Funktionen. Dann ist ihre *Faltung* $f * g$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$
   a) Seien X, Y unabhängige reelle Zufallsvariable mit Dichten f_X und f_Y. Dann hat $X + Y$ die Dichte $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.
   b) Seien X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ und μ. Berechnen Sie die Dichte von $X + Y$!

(4 Punkte)

Abgabe: 8. Juni in der Vorlesung