Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 5

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1. Bestimmen Sie alle Momente $E[X^n]$, $n \in \mathbb{N}$, der Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, also $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Berechnen Sie auch die Varianz von X.
Hinweis: Zeigen Sie: wenn $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, dann ist $\mu + \sigma X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Berechnen Sie dann die Momente von $\mathcal{N}(0,1)$.

(4 Punkte)

2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum. Zeigen Sie:

   1. Für festes $B \in \mathcal{F}$ mit $P(B) > 0$ definiert $Q(A) = P(A|B)$, $A \in \mathcal{F}$, ein W-Maß auf $\mathcal{F}$.
   2. Sei $I = \{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$, oder $I = \mathbb{N}$. Sei weiters $(B_i)_{i \in I}$ eine Folge paarweiser disjunkter Ereignisse mit jeweils positiver Wahrscheinlichkeit und $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}$:
   $$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) P(B_i).$$
   3. In der selben Situation wie oben gilt für jedes $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$ die *Bayesformel*:
   $$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A|B_j)P(B_j)}.$$
   4. Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ mit $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Dann gilt die Multiplikationsformel:
   $$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

(4 Punkte)

3. a) Seien X_1 und X_2 unabhängige ZV mit $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass die ZV X_1 und $X_1 X_2$ unabhängig sind. Gilt das auch für das System der drei ZV $(X_1, X_2, X_1 X_2)$?
b) Sei X eine reelle ZV und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann sind die ZV X und $f(X) = f \circ X$ unabhängig genau dann wenn $f(X)$ fast sicher konstant ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für Mengensysteme $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ gilt: $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ sind unabhängig genau dann, wenn $\forall A \in \mathcal{G}_1 : \ P(A) \in \{0, 1\}$.

(4 Punkte)

4. a) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige reelle ZV mit Verteilungsfunktionen F_i, $i = 1, \dots, n$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen der ZV
$$Y = \max_{i=1,\dots,n} X_i \text{ und } Z = \min_{i=1,\dots,n} X_i.$$

b) Gegeben eine Verteilungsfunktion F (also eine rechtsstetige, wachsende Funktion mit $\inf_x F(x) = 0$ und $\sup_x F(x) = 1$). Definiere

$$F^{-1}(y) \equiv \sup\{x \in \mathbb{R} \,|\, F(x) \leq y\}.$$

Sei $U \sim U(0,1)$ gleichverteilt, dann hat die ZV $F^{-1}(U)$ die Verteilungsfunktion F.

(4 Punkte)

Abgabe: 18. Mai in der Vorlesung