Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 4

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

Die Notation $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ bedeutet, dass die Zufallsvariable X gemäß der Exponentialverteilung zum Parameter λ verteilt ist. (Analog für andere Verteilungen und andere Parameter.)

1. Zeigen Sie:

   a) Ist $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ und $a > 0$, dann ist $aX \sim \mathrm{E}(\frac{\lambda}{a})$.

   b) Ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und sind $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dann ist $(aX + b) \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

   (4 Punkte)

2. Berechnen Sie Erwartungswert $E[X]$ und Varianz $\mathrm{Var}(X)$, wenn die Zufallsvariable X wie folgt verteilt ist:

   a) $X \sim \mathrm{B}(n, p)$ (Binomialverteilung),

   b) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ (Poissonverteilung),

   c) $X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ (Exponentialverteilung).

   (4 Punkte)

3. In dieser Aufgabe geht es um Dichtefunktionen.

   a) Zu Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

   $$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{falls } |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Für welche Werte von a und b ist f eine Dichtefunktion?

   b) Zeigen Sie, dass die Dichtefunktion der Normalverteilung,

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

   tatsächlich die Eigenschaften einer Dichtefunktion besitzt.

   (4 Punkte)

4. Sei X reellwertige, diskret verteilte Zufallsvariable mit $P(X > 0) = 1$, die nur endlich viele verschiedene Werte annimmt.

a) Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung gilt:

$$E\left[\frac{1}{X}\right] \geq \frac{1}{E\left[X\right]}. \tag{1}$$

b) Unter welchen Bedingungen an die Verteilung von X gilt Gleichheit in (1)?

c) Zeigen Sie, dass für X wie beschrieben aus $E\left[X\right] = 0$ folgt, dass $P\left(X = 0\right) = 1$ gilt.

(4 Punkte)

Abgabe: 11. Mai in der Vorlesung