Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 3

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1.

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum und definiere die Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ über

$$X(\omega) \;=\; \begin{cases} -1 & , \ \omega \in A_1, \\ 1 & , \ \omega \in A_1^c \cap A_2, \\ 0 & , \ \omega \in A_1^c \cap A_2^c, \end{cases}$$

wobei $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$. Ist X eine Zufallsvariable? Begründen Sie.

(b) Sei X auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Für $\lambda > 0$ definiere

$$Y \;:=\; -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X).$$

Geben Sie den Wertebereich, die Verteilungsfunktion und die Dichte von Y an.

(4 Punkte)

2.

(a) Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}$. Beweisen Sie die Gleichheit

$$E[X] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n).$$

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ bijektiv}\}$ und $P : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ die Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Sei zudem $X : \Omega \to \{1, \ldots, n\}$ gegeben durch

$$X(f) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{f(i)\}}(i) \qquad \text{für } f \in \Omega.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $Var(X) := E[X^2] - (E[X])^2$.

(4 Punkte)

3. Eine Gemeinschaft bestehe aus m Familien, von denen n_i Familien genau i Kinder haben, $i \in \{0, 1, \ldots, r\} \subseteq \mathbb{N}$. Es gilt: $\sum_{i=0}^{r} n_i = m$. Es werde eine Familie gemäß der Gleichverteilung zufällig gewählt und dabei sei X die Anzahl der Kinder in dieser Familie. Weiter werde eines

der $\sum_{i=1}^{r} in_i$ Kinder (ebenfalls gemäß Gleichverteilung) zufällig gewählt und es sei Y die Gesamtzahl der Kinder in der Familie dieses Kindes. Zeigen Sie: $E[Y] \geq E[X]$. *(4 Punkte)*

4. Die Binomialverteilung einer Zufallsvariablen X zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$ ist definiert durch

$$P(X = k) \;:=\; \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

   (a) Sei X binomialverteilt mit den Parametern n und p. Berechnen Sie $P(X$ ist gerade$)$.

   (b) Ihr Computer stürzt regelmäßig ab. Die Anzahl der Abstürze sei binomialverteilt zu den Parametern n und p. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $G(k,p)$, dass der erste Absturz in der k-ten Sitzung passiert.
   Bemerkung: Man nennt G die *geometrische Verteilung*.

(4 Punkte)

Abgabe: 04. Mai in der Vorlesung