Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

STOCHASTIK I Sommersemester 2015

ÜBUNGSBLATT 2

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1. Seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $A_k \in \mathcal{F}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$. Beweisen Sie die Formel von Sylvester:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{l=1}^{n}\left((-1)^{l-1} \sum_{\{k_1,\ldots,k_l\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_l})\right)$$

Hinweis: Vollständige Induktion über n und kombinatorische Überlegungen. *(4 Punkte)*

2. In dieser Aufgabe geht es um Beispiele für Sigma-Algebren.

a) Sei Ω endlich, d.h. $|\Omega| = n$. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge 2^Ω eine Sigma-Algebra ist mit 2^n Elementen.

b) Zeigen Sie, dass $E := \{(a, b) : a < b; a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein abzählbarer Erzeuger der Borel-Sigma-Algebra ist.

c) Seien $B := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} \colon A \text{ oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar}\}$. Zeigen Sie: $\sigma(B) = \mathcal{A}$.

Hinweis: Für die Inklusion $\subset$ in Teil c) ist es hilfreich, zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine Sigma-Algebra ist. *(4 Punkte)*

3. Schreiben Sie in folgenden Teilaufgaben jeweils zuerst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf und berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten geeigneter Ereignisse, um die Fragen beantworten zu können.

a) Würden Sie beim gleichzeitigen Werfen von vier Würfeln eher auf das Erscheinen mindestens einer Sechs wetten oder darauf, dass keine Sechs erscheint?

b) Wie viele (faire) Münzen muss man werfen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, nur Wappen zu werfen, ungefähr so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser im Lotto (6 aus 49)?

(4 Punkte)

4. Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und F die zugehörige Verteilungsfunktion, d.h.

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ein **Atom** vom Maß μ ist ein Singleton $\{x\}$, so dass $\mu(\{x\}) > 0$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\mu(\{x\}) = F(x) - F(x_-)$.

b) F ist stetig genau dann, wenn μ keine Atome besitzt.

c) Sei $a > 0$ fest gewählt und

$$\delta_a(x) := \begin{cases} 1 & x = a, \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

das Dirac-Maß in a. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion zu $\mu(x) := \delta_a(x)$.

(4 Punkte)

Abgabe: 27. April in der Vorlesung