



ÜBUNGSBLATT 13

Dieses Blatt ist eine Art Probeklausur und fließt nicht mehr in die reguläre Bewertung ein. Es wird in der Vorlesung am 15. Juli besprochen.

1. Bei der Neuerscheinung eines Buches liege die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Seite bei 0,003. Es wird angenommen, dass die Fehler unabhängig voneinander entstehen. Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Buch mit 1.000 Seiten insgesamt höchstens fünf Seiten fehlerhaft sind? Verwenden Sie als Approximation

- (a) die Standardnormalverteilung,
- (b) die Poissonverteilung.

2. Seien die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und seien ihre Erwartungswerte endlich. Zeigen Sie: Der Erwartungswert des Produkts $\prod_{i=1}^n X_i$ der Zufallsvariablen ist endlich und es gilt $E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n]$.

3. Sei die zweidimensionale Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)^T \sim \mathcal{N}_2(a, \Sigma)$ normalverteilt zu den Parametern

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welche Verteilung besitzt $X_2 - 2X_1$?

Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$Y := \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 + 3 \\ \alpha X_1 - X_2 + 5 \end{pmatrix}.$$

- (b) Welche Verteilung besitzt Y ?
 - (c) Für welches α sind Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?
4. Sind folgende einzelne Aussagen wahr oder falsch? Beweisen Sie die richtigen Aussagen. Bei falschen Aussagen geben Sie eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.
- (a) Auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ gibt es eine Gleichverteilung, d.h. ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P(\{n\}) = P(\{1\})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Seien $U_1, \dots, U_n$ unabhängige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Für die Zufallsvariable $W_n := n \cdot \min(U_1, \dots, U_n)$ gilt

$$P(W_n \leq c) \longrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-c} & \text{für } c > 0, \\ 0 & \text{für } c \leq 0. \end{cases}$$

- (c) Sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gibt es keine Folge $(A_n)_n \subset 2^\Omega$ von unabhängigen Ereignissen mit $0 < P(A_n) = P(A_1) < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 - (d) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identischen verteilten Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $0 < E[X_1^2] < +\infty$ und $E[X_1] = 0$. Dann konvergiert die Folge $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ P -fast sicher gegen Null.
 - (e) Auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gibt es eine Zufallsvariable X , die unabhängig von sich selbst ist.
5. Zum Abschluss werden noch wichtige Begriffe und Eigenschaften abgefragt. Geben Sie die Sätze und Definitionen in der Formulierung der Vorlesung oder einer inhaltlich äquivalenten Formulierung an.
- (a) Formulieren Sie das starke Gesetz der großen Zahlen.
 - (b) Geben Sie die Definition von unabhängigen Ereignissen an.
 - (c) Geben Sie die Tschebyschow'sche Ungleichung an.
 - (d) Nennen Sie die Jensen'sche Ungleichung.