Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Dr. Christian Bayer
Dipl.-Math. Jana Bielagk
Dipl.-Wirtsch.-Math. Oliver Janke

Stochastik I Sommersemester 2015

Übungsblatt 12

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separatem Blatt und versehen Sie diesen mit Ihren Namen, Ihren Matrikelnummer und der Übungsgruppe, in der Sie die Lösungen zurückgegeben haben möchten.

1. Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ heißt *straff*, falls

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \|x\| > K \right\} \right) = 0. \tag{1}$$

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[X_n^2] < \infty$. Sei $\mu_n := P_{X_n}$ das Bildmaß (d.h. die Verteilung) von X. Zeigen Sie, dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist.
Hinweis: Markow'sche Ungleichung

b) Überprüfen Sie, ob folgende Familien von Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ straff sind:

(i) Sei $\mu_n := \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $\delta_n(A) = 1_A(n)$ (das Dirac-Maß) ist.

(ii) Sei F eine beliebige Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ und ν_n das zu $F_n(x) := F(x-n)$ gehörige Maß ($n \in \mathbb{N}$).

(4 Punkte)

2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte, integrierbare Zufallsvariablen mit $m := \mathrm{E}[X_i]$, $i \in \mathbb{N}$. Sei weiter μ die Verteilung der X_i. Für jedes $\omega \in \Omega$ gibt

$$\rho_n(\omega, \cdot\,) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(\omega)}(\cdot\,)$$

die empirische Verteilung der ersten n Beobachtungen an. Zeigen Sie:
Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ gilt, dass $\rho_n(\omega, \cdot\,)$ für $n \to +\infty$ schwach gegen μ konvergiert. *(4 Punkte)*

3. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Schwache Konvergenz impliziert im Allgemeinen nicht die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. (Geben Sie geeignete Zufallsvariablen an und weisen Sie die Konvergenz bzw. fehlende Konvergenz nach.)

b) Seien X_n Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \rightharpoonup c$ (in Verteilung) für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann folgt daraus $X_n \xrightarrow{P} c$ (in Wahrscheinlichkeit).

(4 Punkte)

4. Vervollständigen Sie die Lücken im unten stehenden Beweis des folgenden Theorems.

Theorem 1 (Portemanteau)**.** *Seien P und P_n, $n \in \mathbb{N}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Dann sind äquivalent:*

(1) $P_n \to P$ *schwach*

(2) Für alle beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen $f \in C_b(\mathbb{R})$ *gilt* $\int_{\mathbb{R}} f dP_n \to \int_{\mathbb{R}} f dP$ *für* $n \to \infty$.

(3) Für alle abgeschlossenen Mengen $F \subset \mathbb{R}$ *gilt* $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$.

(4) Für alle offenen Mengen $G \subset \mathbb{R}$ *gilt* $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$.

(5) Für alle Mengen $A \subset \mathbb{R}$ *mit* $P(\partial A) = 0$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2) ist wahr, denn $\boxed{\text{(a)}}$ und (3) $\iff$ (4), weil $\boxed{\text{(b)}}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $F \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge und sei

$$G_m := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, d(x,F) < \frac{1}{m} \right\}, \quad \text{wobei} \quad d(x,F) := \inf_{y \in F} \{|x-y|\}.$$

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit $P(G_M) < P(F) + \varepsilon$, denn $\boxed{\text{(c)}}$. Seien

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ 1-x & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \geq 1, \end{cases} \quad \text{und} \quad f(y) := \phi(M \cdot d(y,F)).$$

Wegen $\boxed{\text{(d)}}$ gilt die Ungleichungskette

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f dP_n = \int_{\mathbb{R}} f dP \leq P(G_M) < P(F) + \varepsilon.$$

(3) $\Rightarrow$ (5): Sei $A \subset \mathbb{R}$ mit $P(\partial A) = 0$. Hierbei ist $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$ der Rand von A, $\bar{A}$ ist der Abschluss und $\mathring{A}$ das Innere von A (also insb. offen). Damit gilt

$$P(A) \leq \boxed{\text{(e)}} \leq \liminf_{n\to\infty} P_n(A) \leq \limsup_{n\to\infty} P_n(A) \leq \boxed{\text{(f)}} \leq P(A),$$

woraus (5) folgt, da $\boxed{\text{(g)}}$.
(5) $\Rightarrow$ (3) und (3) $\Rightarrow$ (1): Ohne Beweis. *(4 Punkte)*

Abgabe: 6. Juli in der Vorlesung